INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE

La Trasmissione del Calore è per gli Allievi probabilmente la parte più nuova della Fisica Tecnica poiché non è mai stata affrontata in altri corsi, come invece avviene, ad esempio, per la Termodinamica.
Questa Scienza si è sviluppata a partire dalla seconda metà dell’ottocento quando Fourier enunciò il suo postulato sulla conduzione termica attraverso una parete. Quella relazione pose le base, fra l’altro, ad una vera e propria rivoluzione culturale che ha portato negli anni ‘settanta Ilia Prigogine a formulare le sue leggi sulla Termodinamica Irreversibile della quale altre volte si è fatto cenno nello studio della Termodinamica Applicata.
Il postulato di Fourier poneva per la prima volta in forma esplicita la dipendenza fenomenologica del flusso di calore ad una differenza di temperatura:

*

$$dQ = -\lambda S \frac{dT}{ds} d\tau$$

(si vedrà in seguito il simbolismo qui indicato) cosa che non andava d’accordo con l’impostazione della Termodinamica Classica per la presenza di una freccia nella trasmissione del calore (da temperatura maggiore verso temperatura minore e mai viceversa, spontaneamente!).
Successivamente molte leggi furono formulate sulla stessa falsariga del postulato di Fourier, ad esempio la Legge di Fick per la diffusione, la legge di Ampère per la corrente elettrica, la legge di Bernoulli per il moto dei fluidi reali. Tutte queste leggi avevano in comune il legame funzionale fra un flusso (di calore, di massa, di corrente, …..) con una causa prima e cioè una differenza di potenziale (ΔT, ΔV, ΔC, Δp,…..).
Si cominciavano a porre le basi per le considerazioni entropiche di Boltzmann e di Gibbs e, negli ultimi due decenni, per la stessa Termodinamica Irreversibile di Y. Prigogine.
In breve vedremo che tutta la Trasmissione del Calore è basata sull’irreversibilità dovuta alla differenza di temperatura. Possiamo allora definire la Trasmissione del Calore più semplicemente come una applicazione della Termodinamica dei processi Irreversibili.
Questa Scienza assume oggi un’importanza fondamentale in tutti i settori della Tecnica, dalla Meccanica all’Elettronica, dall’impiantistica alla energetica degli edifici ed

industriale e alla stessa vita dell’Uomo.

I meccanismi di scambio termico sono alla base di tutti i fenomeni reali sia perch□ direttamente voluti o perch□ indotti da trasformazioni passive per attrito in calore.

L’evoluzione dell’Elettronica, ad esempio, □ oggi fortemente legata al miglioramento degli scambi termici. Si pensi, ad esempio, all’enorme densit□ di potenza termica dei transitori di potenza o dei tubi per impianti radar: si raggiungono gli stessi valori di densit□ di potenza (cio□ di kW/m□) degli impianti nucleari di potenza. Come fare a raffreddare questi componenti in modo che possano lavorare correttamente?

Tutti sappiamo che un moderno microprocessore consuma una potenza specifica (cio□ riferita alla superficie) molto elevata (70 W/cm□ = 700 kW/m□) e che il suo raffreddamento □ un problema gravoso da risolvere, specialmente per installazioni su computer portatili dove si hanno spazi ridotti e possibilit□ di scambi di calore con l’esterno estremamente difficili.

Le applicazioni e le ricadute industriali della Trasmissione del Calore sono immense e non facilmente riassumibili in questa sede.

Ogni impianto, ogni componente di macchine, ogni struttura progettata e costruita dall’Uomo □par soggetta ai fenomeni di scambio termico e quindi di Trasmissione del Calore. E non si pu□ neppure lontanamente immaginare una progettazione cosciente e congruente che non tenga conto dei fenomeni termici di qualunque natura essi siano.

Nei prossimi capitoli si affrontano gli argomenti principali della Trasmissione del Calore e in particolare gli argomenti classici:

- La Conduzione termica;
- La Convezione termica;
- L’Irraggiamento termico.

Si vedranno alcune applicazioni quali gli scambiatori di calore e i collettori solari.

L’impostazione degli argomenti □ in questa sede volutamente tradizionale ritenendo l’impostazione della teoria del trasporto solistica ed ostica per gli allievi del corso di Fisica Tecnica.

Data la limitatezza del Corso, inoltre, non si potranno sviluppare argomenti importanti presenti nei corsi annuali di Trasmissione del Calore. In particolare non si □ dato spazio ai fenomeni di diffusione oggi di fondamentale importanza, ad esempio, per i fenomeni ambientali.

Pur tuttavia si □ voluto fare alcuni cenni ai metodi di risoluzione numerica sia per la conduzione che per la convezione lasciando ai corsi specialistici (Termotecnica, Energetica,

Impianti Termotecnici) lo
sviluppo pi� approfondito di questi argomenti.
L’impostazione che si � data a questo testo �, per necessit� sia di spazio che di tempo, limitata alla
trattazione degli argomenti pi� importanti.
Laddove possibile i singoli argomenti saranno presentati in modo completo, cio� incluse le
dimostrazioni. In alcuni casi si presenteranno solamenti i risultati finali.
Un po’ di attenzione ho voluto prestare all’ebollizione, alla condensazione e ai fluidi bifase dei
quali si far� cenno anche al calcolo delle perdite di pressione: questi argomenti risultano fondamentali
nell’impiantistica di potenza (generatori di vapore, impianti industriali, impianti nucleari,….)
Una estensione ai testi fondamentali pu� aiutare ad approfondire gli argomenti trattati e a
colmare eventuali mancanze di argomenti.
Si fa presente che nel biennio di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica (per tutte le
specializzazioni) � presente il corso di TermoFluidoDinamica nel quale saranno approfonditi con
maggior attenzione gli argomenti qui trattati.
Buon lavoro ragazzi!
Catania 08/01/2006

1 INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE

Si vuole qui presentare alcuni concetti alla base della Trasmissione del Calore. Non si intendi qui
esaurita la trattazione di argomenti che da soli richiederebbero un intero corso annuale ma si ritiene
necessario comunque affrontare gli argomenti che si ritengono pi� importanti per gli studi futuri degli
Allievi Ingegneri.
La Trasmissione del Calore pu� avvenire con meccanismi diversi che possiamo qui classificare:
· Conduzione;
· Convezione;
· Irraggiamento.
A questi si aggiunge la Diffusione di massa (e con essa anche di energia) che in questa sede non viene
affrontata. Ciascun meccanismo di trasmissione � caratterizzato da peculiarit� legate ai materiali, alla
topologia o anche alla geometria. Non tutti questi parametri � necessario che siano presenti nei
meccanismi di scambio, come vedremo nel prosieguo.
Si tenga presente che l’esposizione separata dei meccanismi di scambio non deve mascherare la
reale difficolt� che si ha nella pratica di affrontare globalmente la Trasmissione del Calore spesso somma di
due o pi� modalit� diverse. Cos�, ad esempio, il calore generato da transistor di potenza si trasmette per

conduzione in superficie dove, per convezione e per irraggiamento viene disperso nell'ambiente esterno.

Le leggi fondamentali di ciascun meccanismo di trasmissione del calore sono le seguenti:

Conduzione Termica

Il già citato postulato di Fourier esprime il flusso termico (W) per conduzione attraverso una parete avente facce isoterme, di spessore s (m)e conducibilità termica[1] λ (W/mK), e con T_1 e T_2 le temperature superficiali (K) e di superficie S (m^2) secondo l'equazione:

$$Q = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{s}$$

Convezione Termica

La convezione termica è un fenomeno complesso dato da un insieme di più fenomeni apparentemente semplici: essa è il risultato del movimento di fluidi (attivato o non da dispositivi esterni) che trasportano nel loro movimento energia termica. La complessità di questi fenomeni è formalmente mascherata dalla legge di definizione di Newton che si esprime nella forma:

$$Q = h \cdot S \cdot (T_p - T_f)$$

ove Q è il flusso in W, h è il coefficiente di convezione termica (W/m^2K, di cui dirà nel prosieguo), T_p la temperatura della parete calda e T_f la temperatura del fluido (K).

Irraggiamento Termico

E' una forma particolare di trasmissione del calore attuata mediante onde elettromagnetiche che, una volta assorbite da un corpo, si trasformano in energia interna e quindi in calore.

Tutti i corpi al di sopra dello 0 K emettono onde elettromagnetiche. La legge fondamentale è di Stefan – Boltzmann che per corpi grigi[2] si esprime nella forma:

$$Q = \sigma_0 \varepsilon S F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

[1] Si dirà più diffusamente di questo parametro nel prosieguo.

[2] Si vedrà nel prosieguo la definizione di corpi grigi.

con σ_0 costante pari a 5.67 . 10^{-8} W/m^2K^4, ε emissività specifica del corpo (di cui si parlerà nel prosieguo) e T la temperatura assoluta (K), F_{12} è il fattore di vista relativo allo scambio fra corpo 1 e corpo 2 (di cui parimenti si dirà nel prosieguo).

1.1 CONDUZIONE IN UNA PARETE PIANA

Se consideriamo due superfici isotermiche a temperatura T_1 e T_2, ove è $T_1>T_2$, all'interno di un materiale che supponiamo, a solo scopo euristico e semplificativo, omogeneo ed isotropo[3] allora il più volte citato postulato di Fourier dice che (vedi Figura 1):

$$\Delta Q^* = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{s} \Delta\tau \quad [1]$$

ove si ha il seguente simbolismo:

· λ � una propriet� termofisica del corpo e viene detta conducibilità termica. Le sue unit�par di misura sono, nel S.I. [W/(mK)] mentre nel S.T. sono [kcal/(hm� C)];

· s lo spessore di materia fra le due superfici isoterme considerate, unit� di misura [m];

· S � la superficie attraverso la quale passa il calore; unit� di misura [m^2];

· $\Delta\tau$ � l'intervallo di tempo considerato; unit� di misura [s];

· ΔQ^* � l'energia termica (in J) trasmessa nell'intervallo Δt attraverso la superficie S di materiale avente spessore s e conducibilit� termica λ e temperature T_1 e T_2.

La [1] si pu� scrivere anche in forma differenziale:

$$dQ^* = -\lambda S \frac{dT}{ds} d\tau \quad [2]$$

Il segno negativo che compare nella [1] e [2] deriva dall'enunciato stesso del secondo principio della termodinamica secondo il quale il calore si trasmette, spontaneamente, da temperature maggiori verso temperature minori; la differenza $T_2 - T_1$ � negativa e pertanto il segno meno serve a rendere positiva la quantit� di calore trasmessa uscente dalla superficie pi� calda.

1.1.1 LA CONDUCIBILITÀ TERMICA

I coefficiente λ rappresenta una proprietà termofisica del corpo in esame. Ci� significa che il suo valore � funzione solo del tipo di materiale scelto e dalle sue condizioni fisiche (cio� a quale temperatura e in quale stato fisico, solido o liquido o gas, si trovi). Nella Tabella 1 seguente sono riportati alcuni valori di λ per i materiali pi� usuali. I valori sopra indicato mostrano come λ vari molto dai materiali gassosi a solidi e in quest'ultimo caso ai conduttori.

Questi ultimi presentano, infatti, i valori di λ pi� elevati, in accordo con la teoria della conduzione elettrica che li vede primeggiare sugli altri materiali. In effetti il meccanismo di conduzione termica �par associato strettamente, ove possibile, al meccanismo di conduzione elettronica: sono, infatti, sempre gli elettroni che oltre a trasportare elettricit� trasportano energia (di agitazione termica) lungo i metalli.

Per la conduzione termica di tipo elettronico il parallelismo fra conduzione elettrica dovuta agli elettroni liberi nella banda di conduzione e conduzione termica ad essi associati � ben descritto dalla relazione di Wiedemann – Franz – Lorenz la quale ci dice che:

t
e
G T
λ
λ
= ·

ove G una costante pari a 24.5 10[9] W/AK. In definitiva il meccanismo conduttivo, sia elettrico che termico, lo stesso ed dovuto essenzialmente al movimento della cariche elettroniche.

[3] Un corpo si dice omogeneo se ha caratteristiche chimiche costanti in tutti i suoi punti e si dice isotropo se il suo comportamento non dipende dalla direzione considerata. Ad esempio l'acqua un materiale omogeneo ed isotropo, il legno omogeneo ma non isotropo poich ha caratteristiche che variano con la direzione delle fibre.

Appare a prima vista strano che il diamante abbia valori di λ elevatissimi: esso, si ricorda, un cristallo perfetto di atomi di carbonio disposti in modo geometricamente esatto ai vertici di un icosaedro.

S
T1> T2
Q
s

Il calore si trasmette dalla superfice a temperatura T1 verso la superfice a temperatura inferiore T2, nel verso indicato.
Le superfici sono isoterme e il materiale omogeneeo e isotropo, di spessore s e estensione S.
Le caratteristiche trasmissive del materiale sono date dal coefficiente di conduciblità termica.
Il postulato di Fourier si esprime dicendo che la quantità di energia termica trasmessa é proporzionale, secondo il coefficiente di conducibilità, alla differenza di temperatura (T1-T2) e alla superfice S ed é inversamente proporzionale allo spessore di materiale s fra le due superfici considerate.

Figura 1: Postulato di Fourier per la conduzione.

Materiale	Conducibilità [W/(mK)]
Vapore acqueo saturo a 100 C	0,0248
Ammoniaca	0,0218
Elio	0,1415
Ossigeno	0,0244
Acqua	0,5910
Alcool Etilico	0,1770
Mercurio	7,9600
Olio di oliva	0,1700
Pomice	0,2300
Polistirolo espanso (25 kg/m)	0,0350
Sughero in lastre	0,0500
Calcestruzzo	0,93-1,5
Laterizi	0,7-1,3
Terreno asciutto	0,8200

Acciao 30-50
Ferro 75
Piombo 35
Oro 296
Rame 380
Argento 419
Diamante 2100
Tabella 1: Conducibilit di alcuni materiali
Il diamante, proprio per il fatto di non avere elettroni liberi di conduzione, anche il miglior
isolante elettrico. Allora come mai conduce cos bene il calore?

In realt proprio la sua struttura cristallina perfetta la giustificazione dell'elevato valore di λ: i
cristalli, infatti, oscillano perfettamente in modo elastico e cos possono trasmettere l'agitazione termica
delle molecole da un punto all'altro molto bene.
Pertanto nei cristalli puri la conduzione avviene non pi per via elettronica bens per via elastica[4].
Ci spiega anche perch il ferro conduca meglio il calore dell'acciaio: si ricorda, infatti, che
l'acciaio una lega del ferro e quindi una composizione di ferro con percentuali di carbonio, zinco,
nichel, cromo, ecc, e pertanto questi componenti ostacolano la conduzione reticolare del ferro e la
conduzione termica solo elettronica e ad un livello inferiore di quella del ferro puro.
Quanto sopra detto giustifica l'affermazione che λ sia una proprietà termofisica dei corpi e
quindi reperibile in tutti i manuali specializzati. Tutte le propriet termofisiche
(e in genere tutte le propriet&par fisiche) sono catalogate e raccolte in Manuali
tecnici specialistici. La conducibilit termica λ varia con la
temperatura dei corpi in modo diverso a seconda dello stato fisico in cui si trovano.
In genere, tranne alcune eccezioni riportate nei manuali tecnici, la conducibilit termica λ cresce
con la temperatura nei solidi e nei liquidi.
Nei gas l'aumento della temperatura comporta un incremento dell'agitazione atomica o
molecolare e quindi un maggiore intralcio reciproco fra gli atomi o le molecole e quindi λ diminuisce.
Fra le eccezioni importanti alla regola sopra indicata si ricorda che l'acqua fra 0
e 4 C ha densit&par maggiore del ghiaccio e anche λ maggiore. La relazione
[2] pu essere scritta anche in modo pi&par comodo, ponendo " Q
$s\,q =$, nella seguente forma :
" ( )
T
q grad T T
s
$= -\lambda \Delta = -\lambda = \lambda \nabla$ [3]
ove si ha:

· q” calore trasmesso per unità di tempo e di superficie (detto anche flusso termico specifico).
Unità di misura [W/m^2] o [kcal/(hm^2)].
La trasmissione del calore per conduzione nei corpi è materia alquanto complessa da studiare al di fuori del caso limite sopra indicato con il postulato di Fourier.

1.2 EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Allorquando si desidera studiare il problema della trasmissione del calore in un corpo di geometria non semplice occorre scrivere e risolvere l’equazione generale della conduzione ottenuta da un bilancio di energia per un elemento di volume interno ad un corpo. Per un generico corpo solido possiamo scrivere l’equazione di bilancio dell’energia, come già indicato in Termodinamica, nella forma:

Energia_Entrante – Energia_Uscente + Energia_Sorgente = Energia_Accumulata

e quindi, in forma analitica:

$$-\int_S q''\cdot n\,dA + \int_V q'''\,dv = \int_V \rho\frac{\partial u}{\partial \tau}\,dv \quad [4]$$

In questa espressione il primo termine rappresenta il flusso termico netto (differenza fra quello entrante ed uscente) attraverso la superficie del corpo, il secondo termine è relativo all’energia generata internamente (sorgente) e il secondo membro rappresenta l’energia accumulata che, per un solido, coincide con la sola energia interna u. Applicando il teorema della divergenza al primo membro si può scrivere:

$$-\int_S q''\cdot n\,dA = -\int_V \nabla q''\,dv \quad [5]$$

[4] Si suole dire che la conduzione è di tipo fononica mutuando l'attributo dal fonone che è la più piccola quantità di energia oscillatoria (suono) a data temperatura in un cristallo, in analogia con il fotone che è la più piccola quantità di energia di un'onda elettromagnetica (luce).

Pertanto sostituendo nella [4], tenendo conto che è $\nabla q'' = \nabla(-\lambda\,\nabla T)$ per Fourier, passando ai differenziali si ha:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

[6]
ove q’’’ è il calore per unità di volume (W/m³) generato all’interno del corpo, a è la diffusivitàpar termica data dal rapporto $a = \frac{\lambda}{\rho c}$. Il laplaciano $\nabla^2 T$ può essere espresso in vari modi a seconda della geometria di riferimento. Per le geometrie più comuni si hanno le seguenti espressioni:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{per coordinate rettangolari}$$

[7]

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{per coordinate cilindriche}$$

[8]
La risoluzione dell’equazione della conduzione non è agevole al di fuori di geometrie semplici ed è oggetto di studi approfonditi che fanno ricorso a metodologie matematiche complesse[5].
Oggi si cerca di superare a tali complessità con il ricorso ai metodi numeri approssimati che possono essere utilizzati su computer da tavolo (vedi §1.2.6).
Qualunque sia il metodo utilizzato per integrare l’equazione occorre porre correttamente le condizioni al contorno, in genere spazio-temporali, che possono essere essenzialmente di quattro tipi.
Condizione del 1° tipo (di Dirichlet:)
· Occorre conoscere le temperature in tutti i punti della superficie ad un dato istante, cioè occorre conoscere la funzione T(x,y,x,τ) per l’istante iniziale;
Condizione del 2° tipo (di Neumann)
· Occorre conoscere i gradienti di temperatura in tutti i punti della superficie ad un dato istante, cioèpar occorre conoscere la funzione $\frac{\partial T(x,y,x,\tau)}{\partial n}$ per l’istante iniziale. Se si ricorda il postulato di Fourier appare evidente che una tale condizione equivale a conoscere il flusso termico (
T
q

n
$= -\lambda\, \partial$
∂
)
in ogni punto della superficie.
Condizione del terzo tipo
· Matematicamente si esprime nell’essere il gradiente di temperatura proporzionale alla temperatura stessa.
Se si considera il caso di corpo immerso in un mezzo fluido esterno avente temperatura T_f e si
ricorda l’equazione di Newton sulla convezione (vedi 4) si intuisce come questa condizione
equivalga a porre il flusso conduttivo uscente dalla superficie pari a quello convettivo scambiato
con il fluido. Si riconosce facilmente il significato fisico di questa posizione. Infatti per la [3] si ha,
anche:
T
q
n
$-\lambda\, \partial =$
∂
$(\ )_f\, q = h\ T - T$
[5] Ad esempio con il metodo integrale, con il metodo dei complessi o della trasformata di Laplace per i casi di trasmissione
monodimensionale non stazionaria, metodi dell’integrale di convoluzione (teorema di Duhamel) per transitori termici di cui sia
nota la risposta al gradino o all’impulso oppure si utilizzano le equazioni di Sturm-Liouville per i casi pi complessi.

$(\ )_f$
T
$h\ T\ T$
n
$-\lambda\, \partial = -$
∂
da cui deriva:
1
f
$T\ h$
$T\ T$
$n\ \lambda\ \lambda$
$\partial = - +$
∂
e quindi la condizione del 3 tipo equivale a imporre che il flusso termico specifico uscente dal
corpo sia pari a quello scambiato per convezione termica con il fluido circostante.
Condizione del quarto tipo:
· si tratta di una combinazione della condizione del secondo tipo (di Neumann) fra due corpi solidi a
contatto superficiale. Infatti la condizione in oggetto si esprime dicendo che il

gradiente uscente
dal primo corpo deve essere uguale a quello entrante nel secondo corpo, ovvero anche:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}\bigg|_s = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}\bigg|_s$$

In definitiva la condizione del quarto tipo rappresenta una condizione di congruenza al contorno
nel passaggio fra due corpi.

1.2.1 PARETE PIANA

L’equazione della conduzione (vedi [6]) è integrata per uno strato piano indefinito, come
rappresentato in Figura 2, e quindi con la sola dimensione x che fornisce contributo variabile alla
distribuzione della temperatura. Ciò porta ad avere il seguente sviluppo:

$$\nabla^2 T = 0 \quad [9]$$

che integrata due volte fornisce l’integrale generale:

$$T = ax + b \quad [10]$$

Le costanti a e b si determinano in base alle condizioni al contorno:

$$T = T_1 \text{ per } x = 0$$

$$T = T_2 \text{ per } x = s$$

Y
X

Figura 2: Parete piana indefinita

Effettuando i calcoli si trova:

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{s}x + T_1 \quad [11]$$

che rappresenta una distribuzione lineare di temperatura (nell’ipotesi di λ costante) per la parete
piana indefinita nell’ipotesi di λ costante (materiale omogeneo ed isotropo). Nella realtà le pareti sono
di dimensioni finite e quindi si hanno sempre effetti di bordo da tenere in conto e che in questa sede,
per sola semplicità, si trascurano.
Applicando la [3] si ottiene:

$$q'' = \lambda \frac{T_1 - T_2}{s} \quad [12]$$

la cui derivazione poteva essere fatta direttamente mediante il postulato di Fourier considerato
che le superfici isoterme, essendo la parete indefinita, coincidono con piani paralleli alle facce esterne.

1.2.2 CONDUZIONE DEL CALORE IN UNO STRATO CILINDRICO

Nel caso in cui si abbia uno strato cilindrico (detto anche manicotto cilindrico), come in Figura 3,
l’applicazione della [6]) in coordinate cilindriche porta ad avere:

2
2
1
0
d T dT
dx r dr
+ =

che pu□ essere scritta anche nella forma pi□ comoda da integrare:

1
0
d dT
r
r dr dr
□ □ □ □ □ □ □ □ =
□ □ □ □

che integrata due volte conduce all’integrale generale:

1 2 $T(r) = C \ln r + C$ [13]

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 si determinano mediante le condizioni al contorno (del 1□
tipo) seguenti:

1 1
2 2
( )
( )
T r T
T r T
=
=

Risolvendo il sistema e sostituendo nella [13] si ottiene la distribuzione della temperatura nel
manicotto cilindrico:

1 2
1
1 1
2
( ) ln
ln
T T r
T r T
r r
r
= + −

Applicando la [3] si ottiene il flusso termico:

1 2
2
1
1
ln
2
T T
Q
r

π *l*λ *r*
= – [14]
ove l □ la lunghezza del manicotto, λ □ la conducibilit□ termica.
Se la differenza s =r_2-r_1 □ piccola rispetto ad r_1 allora si dimostra che anzich□ usare la relazione
[14] si pu□ ancora utilizzare la [3]. Infatti risulta:
2 1
1 1 1 1
ln ln ln 1
r r s s s
r r r r
= □□ + □□ = □□ + □□ ≅
□ □ □ □
ove l'ultimo termine rappresenta lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine.
Sostituendo questo risultato nella [14] si ottiene:

1 2 1 2 1 2
1 1
1
2 (2)
T T T T T T
Q
s s s
π *l*λ *r* π *lr* λ *S*λ
= − = − = −
e pertanto il flusso termico risulta ancora dato dalla [3].
In pratica se lo spessore del manicotto □ piccolo esso si comporta come se fosse una parete piana,
come sopra dimostrato.
Ci□ risulta utile quando si deve calcolare il flusso trasmesso attraverso una parete curvilinea: se il
raggio di curvatura □ grande allora si pu□ considerare la parete piana ed applicare le solite relazioni.
La superficie di scambio termico da prendere in considerazione □ quella interna o quella esterna a
seconda il lato di scambio termico che interessa.
r1
r2
Nel caso di uno strato cilindrico di materiale
omogeneo ed isotropo con conducilità termica
si ha una relazione del flusso termico
specifi co che dipende dal rapporto dei raggi
esterno ed interno.
λ
Figura 3: Trasmissione per conduzione in un manicotto cilindrico
1.2.3 RAGGIO CRITICO
Possiamo immediatamente fare una semplice applicazione dei concetti sopra esposti
determinando il raggio critico di isolamento per un condotto cilindrico. Si abbia un condotto, come indicato
in Figura 4, con raggio esterno pari ad r_1 e raggio di isolamento r. Il flusso termico scambiato verso
l'ambiente esterno nel quale si suppone il fluido a temperatura t_f vale:
1

$$Q = \frac{t_1 - t_f}{\frac{1}{2\pi l\lambda}\ln\frac{r}{r_1} + \frac{1}{2\pi r l h}}$$

Isolante
tf
t1
r
r1

Figura 4: Condotto cilindrico isolato

A denominatore si ha la resistenza termica totale somma di due resistenze: quella del condotto circolare di raggio r_1, cioè par $\frac{1}{2\pi l\lambda}\ln\frac{r}{r_1}$, e quella dell'isolante termico, cioè par $\frac{1}{2\pi r l h}$.

Poiché la prima resistenza ha andamento logaritmico con r mentre la seconda è con andamento iperbolico, si può immaginare che esista un valore minimo dato dalla condizione:

$$\frac{dR_t}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2\pi l\lambda}\ln\frac{r}{r_1} + \frac{1}{2\pi r l h}\right] = 0$$

Il valore cercato, detto raggio critico, vale:

$$r_{critico} = \frac{\lambda}{h}$$

La derivata seconda della resistenza totale è positiva e quindi si ha un punto di minimo. In Figura 5 si ha la rappresentazione di quanto detto. In corrispondenza del minimo della resistenza totale, R_t, si ha un massimo del flusso trasmesso verso il fluido esterno e pertanto si possono fare due considerazioni:

· Se il raggio totale r (tubo pi isolante) minore del raggio critico r_c allora un amento dell'isolante
porta ad avere una diminuzione della resistenza totale e quindi anche un incremento del flusso
trasmesso. Questo caso interessa i cavi elettrici per i quali si desidera che l'isolante esterno, con
funzioni sia di isolante elettrico che termico, disperda pi potenza possibile per evitare il
riscaldamento del conduttore di rame interno;
· Se il raggio totale r maggiore del raggio critico r_c allora un incremento dell'isolante comporta un
aumento della resistenza totale, ossia anche una diminuzione del flusso trasmesso all'esterno. E'
questo il caso dei condotti per acqua calda o fredda e per vapore per i quali si desidera limitare il
pi possibile i disperdimenti verso l'esterno.
r
R
r
c
Ri
Rc
Rt
Figura 5: Andamento delle resistenza
Poich il raggio critico dipende sia dalla conducibilit termica dell'isolante che dal valore del
coefficiente di convezione esterna, si comprende come il valore corrispondente sia praticamente
imposto nelle applicazioni. Ad esempio per λ = 0.032 W/mK (buon isolante termico) ed h =10 W/mK
(convezione naturale) si avrebbe r_c = 0.0032 m.
Pertanto per condotti di diametro maggiore di 6.4 mm si ha convenienza ad isolare ($r > r_c$)
mentre per condotti con raggio inferiore a 6.4 mm (tubi piccoli usati, ad esempio, negli impianti
frigoriferi) non si ha convenienza ad isolare e quindi vengono lasciati nudi.
Per far variare il raggio critico si pu agire, per dato isolante (e quindi per dato λ) sul meccanismo
di convezione termica, ad esempio, passando dalla convezione naturale a quella forzata che, come si
vedr, produce un incremento di h.

1.2.4 CONCETTO DI RESISTENZA TERMICA PER CONDUZIONE

La [3] pu essere scritta in una forma del tutto equivalente:

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{\lambda}}$$

del tutto formalmente analoga alla relazione di Ohm per la conduzione elettrica:

$V_1 \; V_2$

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

ove l'analogia (detta elettro-termica) è fra le seguenti grandezze:

- T_1-T_2 , differenza di temperatura, con V_1-V_2 , differenza di tensione;
- q, flusso termico, con i flusso di corrente;
- s/λ , resistenza termica, R resistenza elettrica.

Pertanto al rapporto:

$$R_t = \frac{s}{\lambda}$$

si dà il nome di resistenza termica di conduzione.

1.2.5 CONDUZIONE TERMICA NEI MATERIALI IN SERIE E IN PARALLELO

L'analogia elettro-termica può facilmente portare a trovare la relazione del flusso termico attraverso materiali in serie e in parallelo. Nel caso di materiali in serie (vedi Figura 6a) si ha q costante e quindi combinando la [3] per i due materiali si ottiene la relazione:

$$q'' = q''_1 = q''_2 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{t1} + R_{t2}} \quad [15]$$

In pratica se si hanno due o più materiali in serie si sommano le resistenze termiche come nel caso del collegamento in serie dei conduttori elettrici.

Per materiali in parallelo, (vedi Figura 6b), si ha che è comune la temperatura della facce esterne mentre i flussi termici si sdoppiano in q_1 e q_2 ciascuno dato dalla [3] con pari ΔT ma con s/λ dato da ciascuno strato. In definitiva si ha la relazione :

$$q'' = q''_1 + q''_2 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1}} + \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_2}{\lambda_2}} = (T_1 - T_2)\left(\frac{\lambda_1}{s_1} + \frac{\lambda_2}{s_2}\right) = (T_1 - T_2)(G_1 + G_2) \quad [16]$$

Pertanto nei casi di materiali in parallelo si sommano le ammettenze termiche date dagli inversi delle resistenze termiche.
Nei casi misti di materiali in serie e in parallelo si applicano le regole sopra viste in cascata partendo dalla faccia pi esterna a sinistra e andando verso la faccia pi esterna a destra.
Quanto sopra detto a proposito della [15] e della [16] riveste grande importanza nelle applicazioni alla termofisica degli edifici. Infatti se colleghiamo in serie e parallelo strati di materiali aventi caratteristiche trasmissive molto diverse fra loro si possono avere effetti indesiderati.

s1 s2
λ1 λ2
T1 T2 T3
S
q q
T1 T2
λ1
λ2
S1
S2
s
q1
q2
q1
q2
Serie
Parallelo

a b

Figura 6: Modalit di trasmissione per conduzione in serie e in parallelo

In particolare, se un materiale molto pi conduttore degli altri allora il flusso termico si addensa in esso pi che negli altri. Si ha un effetto di by pass del calore detto ponte termico che risulta molto negativo, ad esempio, nelle prestazioni termiche delle pareti degli edifici.
Si consideri, ad esempio il caso di una parete avente una finestra inserita nella muratura. Essendo il vetro molto pi conduttore del calore della muratura conduce meglio il calore e funge da by pass per la parete.
Poich la temperatura nelle zone di contatto fra materiali a diversa conducibilit   poco variabile (per la condizione del 4 tipo) ne consegue che la parete in vicinanza del vetro si porta ad una temperatura pi bassa di quella in zone maggiormente lontane.
E' facile, pertanto, che si raggiungano valori di temperatura inferiore alla temperatura di rugiada e quindi che si formi condensa superficiale interna che produce ammuffimento e decomposizione dei materiali componenti.
Lo stesso fenomeno si ha a contatto fra la muratura (ancora di pi se isolata) e

gli elementi strutturali in calcestruzzo (notevolmente più conduttore della muratura) e quindi se non si provvede ad isolare la zona di contatto si rischia di avere condensa di vapore e quindi danni alle pareti stesse.

1.2.6 PARETE PIANA CON SORGENTE DI CALORE INTERNA

L'equazione generale della conduzione [6] fornisce, con riferimento alla geometria di Figura 7, l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \qquad [17]$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$T = T_1$ per x=L

e ancora:

q=0 per x=0

Risolvendo la [17] si ottiene l'integrale generale:

$$T = -\frac{q'''}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad [18]$$

Applicando le sopra indicate condizioni al contorno si ottiene la nuova distribuzione di temperatura nello strato piano:

$$T = T_p + \frac{q'''}{2\lambda}\left(L^2 - x^2\right)$$

Tp
Tp
To
q'''
Y
X
L
L
0

Figura 7: Strato piano monodimensionale con sorgente interna

Come si può osservare (e come indicato in Figura 7) la distribuzione di temperatura è ora parabolica e non più lineare, come la [11] indicava nel caso di assenza di sorgente interna.

Il caso qui studiato si può presentare, ad esempio, studiando la distribuzione di temperatura in un getto di cemento durante la reazione esotermica di presa, oppure nella generazione di calore per effetto Foucault nelle lamelle di un trasformatore o di una macchina elettrica e nella produzione di calore per effetto Joule nei conduttori.

In genere si può affermare che la sorgente interna di calore porta ad avere distribuzioni di temperatura di grado superiore di uno rispetto ai casi senza sorgenti interne.

1.2.7 CONDUZIONE STAZIONARI BIDIMENSIONALE

Si vuole qui dare un breve cenno alla risoluzione della [6] nel caso di regime stazionario, senza sorgenti di calore interne e per in caso bidimensionale semplice: una lastra piana rettangolare aventi dimensioni a e b e con temperatura esterna pari a T_1 su tre lati e T_2 sul quarto lato, come indicato in Figura 8. La [6] fornisce la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [19]$$

Per integrare la [19] occorre ipotizzare una condizione di omogeneità della funzione T(x,y) cercata, cioè si suppone che sia possibile scrivere:

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad [20]$$

Sostituendo nella [19] si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} \quad [21]$$

Poiché ciascuno dei due membri è funzione di una sola variabile deve necessariamente essere una costante il valore comune. Indicato con $-\lambda^2$ tale costante si ha, dalla [21]:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad [22]$$

Gli integrali generali di ciascuna delle due equazioni differenziali sono i

seguenti:
$X\ A\sin\ x\ B\cos\ x$
$Y\ Cshn\ y\ Dchs\ x$
λ λ
λ λ
= +
= +
y
x
T2
T1 T1
T1
a
b
Figura 8: Strato piano bidimensionale

Pertanto per la [20] si pu scrivere:
$T(x,y) = \left(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x\right)\left(Cshn\lambda y + Dchs\lambda y\right)$ [23]
Le quattro costanti di integrazione (2 per x e 2 per y) si determinano con le condizioni:
1
1
1
2
per 0
per a
per y 0
per y b
$T\ T\ x$
$T\ T\ x$
$T\ T$
$T\ T$
= =
= =
= =
= =
Risulta pi agevole risolvere ponendo $\theta = T - T_1$ e pertanto la [23] diviene:
$\theta\,(x,y) = \left(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x\right)\cdot\left(Cshn\lambda y + Dchs\lambda y\right)$ [24]
e le condizioni al contorno:
( ) 2 1
0 per 0
0 per a
0 per y 0
-T per y b
x
x
T
θ
θ
θ
θ
= =
= =
= =

= =
La prima e la terza condizione comportano B=0 e D=0. La seconda condizione fornisce:

$$0 = AC \sin\lambda a \cdot shn\lambda y$$

ovvero, assumendo $shn\lambda y \neq 0$:

$$0 = \sin\lambda a$$

per la legge dell'annullamento del prodotto. Questa equazioni ammette soluzioni per:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{con } n = 0,1,2,3,........\infty$$

Sostituendo in [24] si ottiene:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (AC)_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot shn\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad [25]$$

ove si è escluso il caso n=0 perché non fornisce contributo. Le nuove costanti $(AC)_n$ si ricavano
con la quarta condizione al contorno, cioè:

$$\theta_0 = T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (AC)_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot shn\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad [26]$$

Se ora si confrontano i termini di questa equazione con quello dello sviluppo in serie di Fourier di
$\theta_0 = T_2 - T_1$ tra x ed a si ottiene:

$$T_2 - T_1 = f(x) = \sum C'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

∑

e pertanto la [26] diviene, dopo alcuni passaggi:

( ) ( )
2 1
1
1 1
2 sin
n
n
n y
shn
n x a
T T
n a n b
shn
a
π
θ π
π
∞
=
= − − −
∑

In Figura 8 si ha anche la rappresentazione grafica delle isoterme e delle linee di flusso.

Come si vede il problema diviene molto complesso già per un caso di geometria semplice (bidimensionale) e regolare. Diventa esplicitamente irrisolvibile per i casi più comuni della realtà e pertanto occorre utilizzare metodi di calcolo non esatti.

1.2.8 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE

La risoluzione della [6] nel caso di regime variabile porta ad avere equazioni differenziali in coordinate spazio-temporali di complessa risoluzione. Data la limitazione di tempo del presente Corso si ritiene di non approfondire ulteriormente gli sviluppi analitici per i quali si rimanda ai testi specialistici di Trasmissione del Calore.

Si vuole qui sottolineare l’importanza che il transitorio termico (dato proprio dal regime variabile) ha in vari campi di applicazione fra i quali il comportamento termofisico dell’edificio.

Spesso, infatti, si supporranno, per semplicità di calcolo, condizioni stazionarie (più facili da studiare) ma nella realtà queste non si verificano mai.

Si pensi, ad esempio, alle variazioni climatiche esterne (che sono le condizioni forzanti per

l’edificio) che risultano variabili durante il giorno (per effetto del cammino solare apparente e delle
condizioni climatiche esterne) e durante i vari mesi dell’anno. Si desidera qui presentare alcuni casi
semplici di transitorio termico che, per□, risultano molto interessanti nelle applicazioni pratiche.

1.2.9 TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO DI UN CORPO A RESISTENZA TERMICA TRASCURABILE.

Questo argomento, pur se semplificativo di alcuni aspetti termotecnici, □ molto importante
perch□ ci consente di fare alcune considerazioni utili sul piano pratico dei transitori dei corpi.

Supponiamo per il momento di avere il corpo a resistenza termica interna trascurabile[6] a temperatura
iniziale T_i e che questo sia immerso in un fluido avente temperatura costante (ambiente di grande
capacit□ termica) T_a. Se un corpo ha resistenza termica interna trascurabile (quindi □ un ottimo
conduttore di calore, ossia ha λ elevato, come, ad esempio nei metalli) allora la temperatura interna del
corpo varia molto poco e si pu□ assumere che essa si mantenga uniforme (la medesima T in qualunque
punto) in tutto il corpo stesso.

Quest’ipotesi facilita molto i calcoli perch□ nella [6] non vi □ pi□ il contributo della variazione
spaziale ma resta solo quello temporale che pu□ essere determinato facilmente con il seguente
ragionamento. Il corpo si raffredda se $T_0 > T_a$ e possiamo scrivere la semplice equazione di bilancio
energetico:

$Q_i - Q_u = Accumulo$

che in forma analitica diviene:

$0 \; (\;) \; _a$

dT

$hA \; T \; T \; mc$

$d\tau$

$- - =$

Indicando con $\theta = T - T_a$ la precedente equazione diviene:

d

$hA \; mc$

d

$\theta \; \theta$

τ

$- =$ [27]

che □ una semplice equazione differenziale a variabili separabili e a coefficienti che possiamo
ritenere costanti. Integrando si ha:

$_i \; 0$

$d \; hA$

d

mc

$\theta \; \tau$

θ
$\theta \quad \tau$
θ
$\int = - \int$

6 Se la resistenza interna di un corpo fosse nulla allora la temperatura sarebbe uniforme. L’ipotesi di resistenza trascurabile è necessaria per potere assegnare un solo valore di temperatura, con poco errore, a tutto il corpo. Ciò è vero se la conducibilità termica è elevata e se lo spessore è piccolo ($R = s/\lambda$).

da cui si ottiene:

$$\theta = \theta_i \cdot e^{-\left(\frac{hA}{mc}\right)\tau}$$

Ricordando la posizione per la differenza di temperatura si ha:

$$T = T_a + \left(T_i - T_a\right) \cdot e^{-\left(\frac{hA}{mc}\right)\tau} \quad [28]$$

In Figura 9 si ha l’andamento del transitorio di raffreddamento ($T_i > T_a$) e di riscaldamento ($T_i < T_a$). La velocità di variazione della temperatura T del corpo nel tempo è data da:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{d\left(T - T_a\right)}{d\tau} = -\frac{hA}{mc}\left(T_i - T_a\right) \cdot e^{-\left(\frac{hA}{mc}\right)\tau} \quad [29]$$

e all’istante $\tau = 0$ si ha:

$$\left(\frac{dT}{d\tau}\right)_0 = \left(\frac{d\left(T - T_a\right)}{d\tau}\right)_0 = -\frac{hA}{mc}\left(T_i - T_a\right) \quad [30]$$

La tangente all’origine delle curva di raffreddamento, avente pendenza $\frac{dT}{d\tau}$, interseca l’ordinata $(T - T_a) = 0$ in corrispondenza al tempo $\tau_c = \frac{mc}{hA}$ detto costante di tempo.

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8
0
2
4
6
8
10
10
0
t (τ)
T (τ)
0 τ 0.8

Figura 9: Andamento del transitorio di riscaldamento e/o di raffreddamento

Ricordando che mc □ una capacit□ termica e 1/hA □ una resistenza termica si pu□ dire che la costante di
tempo □ τ_c= RC, prodotto della resistenza termica per la capacit□ termica. In pratica si pu□ studiare il
raffreddamento di un corpo in analogia alla carica/scarica di un condensatore in un circuito RC.
Osservando il diagramma di Figura 9 si pu□ ancora dire che dopo un tempo pari a τ_c si ha una
diminuzione del 63.2% del salto iniziale e che dopo 4□5 costanti di tempo il transitorio si □ esaurito.
Pertanto il tempo di raffreddamento e/o di riscaldamento del corpo dipende dal prodotto RC:
una maggiore massa e quindi una maggiore capacit□ termica comporta un maggior tempo di
raffreddamento o di riscaldamento, a parit□ di resistenza termica.
Qualche insegnamento in pi□ possiamo ancora avere da questo studio, seppure semplificato, di
transitorio di raffreddamento/riscaldamento di un corpo. L’esponente dell’equazione di
raffreddamento pu□ scriversi sotto altra forma che lascia intravedere interessanti osservazioni:

c
mc Vc V c
hA hA A h
τ = = ρ = · ρ [31]

L’ultimo membro ci dice che la costante di tempo □ tanto maggiore (per cui si hanno periodi di
raffreddamento e di riscaldamento lunghi) quanto maggiore □, a parit□ del rapporto ρc/h, il rapporto
V/A cio□ il rapporto di forma dell’oggetto.

L’iglu esquimese ha la forma emisferica e per questo solido il rapporto V/A □ il massimo
possibile: la sfera, infatti, ha il maggior volume a parit□ di superficie disperdente o, se si vuole, la minor
superficie disperdente a parit□ di volume.
Pertanto la forma di quest’abitazione □ geometricamente ottimizzata per il minimo disperdimento
energetico e quindi per un maggior transitorio di raffreddamento.
Analoga osservazione si pu□ fare per la forma dei forni di cottura a legna: anch’essi hanno forma
emisferica che consente loro di immagazzinare meglio il calore nella massa muraria e di disperderla il
pi□ lentamente possibile, a parit□ di condizioni esterne, rispetto ad altre forme geometriche.

1.2.10 REGIME VARIABILE IN UNA LASTRA PIANA INDEFINITA

Si consideri una lastra piana indefinita di spessore 2L, come indicato in Figura 10. Le condizioni
di geometria indefinita in y e in z comportano la possibilit□ di descrivere nella sola coordinata x
l’equazione della conduzione:

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad [32]$$

2L X
Y
Z
Figura 10: Lastra piana indefinita

Ove con a si indica la diffusività termica del materiale di cui è fatta la lastra. La [32] rappresenta un'equazione differenziale alle derivate parziali in x e in τ per la cui soluzione ipotizziamo che si possa determinare una funzione a variabili separate del tipo:

$$T(x,t) = X(x)\theta(\tau) \qquad [33]$$

con X(x) funzione della sola x e $\Theta(\tau)$ funzione solo del tempo.
Quest'ipotesi è valida se vale il principio di omogeneità delle condizione al contorno che sono:

- a) $\tau = 0$ per $0 \le x \le 2L$ $H = H_1 = T_1 - T_0$
- b) $\tau > 0$ per $x = 0$ $H = 0$
- c) $\tau > 0$ per $x = 2L$ $H = 0$

Operando la sostituzione della [33] nella [32] si ottiene l'equazione:

$$a\theta\frac{d^2 X}{dx^2} = X\frac{d\theta}{d\tau}$$

dalla quale separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a\theta}\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu^2 \qquad [34]$$

ove si è posto $-\mu^2$ nell'ultimo membro per congruenza fisica[7]. La precedente equazione equivale alle due seguenti:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\mu^2\theta = 0 \qquad [35]$$

e ancora:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \mu^2 X = 0 \quad [36]$$

Abbiamo trasformato l’equazione differenziale spazio - temporale nella somma di due equazioni differenziali funzione una del solo tempo ed una della sola ascissa. Gli integrali generali sono:

$$\theta(\tau) = C_1 e^{-a\mu^2\tau} \quad [37]$$

$$X(x) = C_2 \, sen\mu x + C_3 \cos\mu x \quad [38]$$

Le tre costanti (2 per l’equazione nello spazio ed 1 per l’equazione nel tempo) vanno determinate mediante le condizioni al contorno ed iniziali. L’integrale generale può essere scritto, per l’omogeneità della soluzione posta nella [33], nella forma:

$$T(x,\tau) = C_1 e^{-a\mu^2\tau}\left[C_2 \, sen\mu x + C_3 \cos\mu x\right]$$

che può ancora scriversi nella forma:

$$T(x,\tau) = e^{-a\mu^2\tau}\left[C_m \, sen\mu x + C_n \cos\mu x\right] \quad [39]$$

con costanti C_m e C_n da determinare con le condizioni al contorno ed iniziali.
La condizione $\tau > 0$ per x=0 e $\Theta = 0$ comporta che deve essere $C_n = 0$ per $\tau > 0$.
Per la condizione $\tau > 0$ per x=2L e $\Theta = 0$, scartando la soluzione banale $C_m = 0$, deve essere $sen\, \mu L = 0$ e pertanto:

$2\mu L = n\pi$ per n=1, 2, ..., ∞

da cui derivano gli autovalori:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{2L}$$

per ciascuno dei quali si ha un integrale particolare della [39]. Ne segue che la soluzione generale è data dalla somma di tutti le soluzioni particolari e pertanto deve essere:

$$T(x,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \, e^{-a\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2\tau} \, sen\frac{n\pi x}{2L}$$

∞ –

=

=

Σ [40]

Per la condizione iniziale $\tau=0$ per $0 \le x \le 2L$ e $\Theta = \Theta_i = T_i - T_0$ si ha:

( )

1

i k k

k

H C sen μ x

∞

=

$=\Sigma$ [41]

Se osserviamo la forma della soluzione generale [40] si pu dire che essa rappresenta lo sviluppo
in serie di Fourier della distribuzione di temperatura a primo membro. Pertanto risulta:

2

0

1

2

L

k i

n x

C H sen dx

L L

π =

$\int$ [42]

da cui si ha:

7 Cio per non avere fenomeni divergenti all’infinito.

( ) 2

i 1 cos

k

H

C k

n

π

π

= – [43]

Si osservi che risulta $C_k = 0$ per k = 2, 4, 6, …. E pertanto la soluzione generale diviene:

( )

2

2

1

4 1

,

2

n

a

i L

k

H k x

T x e sen

$k\ L$

$\tau\ \pi\ \tau\ \pi$

π

∞ –

=

=

Σ [44]

con k = 1, 3, 5, …..

Nota la distribuzione iniziale di temperatura H_i si può risolvere la precedente soluzione. Ad esempio se la distribuzione iniziale è di tipo generico f(x) allora la soluzione diviene:

$(\ ) (\ ) \ 2$

2
0
1

1

,

2 2

n
$a\ L$
L
k

$k\ x\ k\ x$

$T\ x\ e\ sen\ f\ x\ sen\ dx$

$L\ L\ L$

$\tau\ \pi\ \tau\ \pi\ \pi$

∞ –

=

=

$\Sigma \int$

sempre con k= 1, 3, 5, ….

Le condizioni iniziali possono esesre diverse da quelle indicate in precedenza che erano del tipo Dirichlet.

Si possono avere anche condizioni di tipo Neumann o miste. In ogni caso si tratta sempre di seguire la procedura sopra descritta per pervenire a soluzioni generali valide sempre per geometrie elementari (strato piano indefinito) valide solo a scopo euristico.

Pertanto non si procederà altre in questa trattazione limitandoci a far osservare come non appena ci si allontana dalle condizioni geometriche semplicissime (caso monodimensionale) si deve affrontare un problema molto complesso[8] non sempre (o meglio, quasi mai) risolvibile analiticamente in modo esplicito.

Vedremo, pertanto, nella trattazione dei metodi numerici come superare questi limiti che la soluzione dell’equazione della conduzione ci pone.

1.2.11 TRANSITORIO TERMICO IN UN MEZZO SEMINFINITO

E’ questo un caso molto importante per l’analisi dei disperdimenti in strati di notevole spessore, come ad esempio nel suolo. Esso, infatti, può intendersi come un mezzo seminfinito, cioè ha origine sulla superficie terrestre e si estende in profondità in modo tale da poterlo considerare infinitamente profondo, come indicato in Figura 11.

Temperatura alla superficie imposta

La [6] diviene:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad [45]$$

Le condizioni iniziali sono:

$T(x,0)=T_i$

e sulla superficie:

$T(0,\tau) = T_o$

La soluzione della [45] non è semplice a causa della doppia variabilità spazio-temporale.

Considerato lo scopo del corso se ne trascura lo sviluppo analitico e si scrive subito la soluzione:

[8] Nei classici testi di trasmissione del calore si possono leggere interessanti capitoli dedicati allo studio di conduzione in regime transitorio per geometrie semplici bi e tridimensionali. I risultati di queste analisi sono sempre riportati in forma grafica con abachi adimensionali dalla complessa interpretazione e dal non sempre agevole utilizzo. Questa trattazione non apporta nulla di nuovo e/o di interessante alle conoscenze dell’Allievo in questa fase di studio. Meglio spendere qualche parola in più per affrontare le moderne metodologie di analisi dei problemi termici complessi. E’ ciò che verrà fatto nel prossimo capitolo per la conduzione e più avanti per la convezione e epr l’irraggiamento.

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_o - T_i} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz = 1 - erf(\eta) \qquad [46]$$

ove $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$

τ
= ed inoltre:
2
0
2
erf ( ) *e* *z* *dz*
η η
π
= ∫ −
la funzione errore di Gauss.
To
Ti
T(x,r)
Temperatura iniziale
∞
∞
∞
x
T
Figura 11: Strato seminfinito—distribuzione della temperatura istantanea
Si definisce funzione errore complementare la funzione:
$erfc(\eta) = 1 - erf(\eta)$
L’andamento della temperatura dato dalla [46] rappresentato nella seguente Figura 12.
1
4.678 10
. 3
θ(η)
0 η 2
0 0.5 1 1.5 2
0
0.5
1
Figura 12: Andamento della temperatura in uno strato seminfinito con T imposta
Flusso alla superficie imposto
Se allo strato di Figura 11 si impone che sia:
$q''(x,0) = 0$
e che alla superficie sia:

$q''(0,\tau) = q''_0$
allora l’equazione [45] si pu ancora scrivere nella forma (differenziando rispetto ad x):
3 2
3
T T
a
x x τ
∂ = ∂
∂ ∂ ∂
[47]
Essendo:
T
q
x
= −λ ∂
∂
[48]

si può ancora scrivere:

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad [49]$$

che è formalmente analoga alla [45] e pertanto la soluzione è:

$$\frac{q''}{q''_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz = 1 - erf(\eta) \quad [50]$$

La distribuzione di temperatura si ottiene integrando la [48] per cui si ottiene:

$$T_p - T_i = \int_0^{\infty} \frac{q_0}{\lambda} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) dx$$

che fornisce la soluzione:

$$T(x) - T_i = \frac{2 q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} - \frac{q_0 x}{\lambda} \cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

[51]
1.2.12 REGIME PERIODICO STABILIZZATO
Un caso molto importante per le applicazioni pratiche (sia in campo industriale che civile) si ha
quando si applica una forzante (cioè una temperatura) variabile in modo periodico ad uno strato piano
seminfinito.
E’ questo il caso, ad esempio, della variazione della temperatura ambientale esterna negli edifici,
della variazione periodica di temperatura all’interno di un cilindro di un motore a combustione interna.
Per studiare questo caso supporremo inizialmente che la variazione di temperatura sia di tipo
sinusoidale e quindi ci si riferisca alla più semplice variazione periodica.
L’importanza di questo caso si deduce immediatamente se si pensa che una qualunque forzante
periodica può essere scomposta in una serie di Fourier in termini di seni e/o coseni e quindi in termini
di funzioni periodiche elementari e pertanto la soluzione generale è data dalla somma (se rimangono
valide le ipotesi di linearità del problema) delle soluzioni parziali.
Con riferimento alla Figura 13 si supponga di applicare alla superficie esterna dello strato
seminfinito una variazione di temperatura periodica sinusoidale della forma:

$$T(0,\tau) = T_m + \Delta T_0 \sin \omega\tau$$

con:
- $\omega = 2\pi f$ pulsazione ed f la frequenza;
- T_m la temperatura media, [°C];
- ΔT_0 la variazione di temperatura massima ; [°C]

Per comodità di calcolo poniamo $\theta = T - T_m$ e pertanto la precedente si può scrivere:

$$\theta(0,\tau) = \Delta T_0 \sin\omega\tau$$

∞
∞
∞
x
λ,
ρ, c Tm
Δ To
T (0, t)
x

Figura 13: Variazione periodica di temperatura in uno strato seminfinito
L’equazione della conduzione diviene, in regime variabile monodimensionale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

Se ora definiamo la temperatura coniugata:

$$\theta(0,\tau) = \Delta T_0 \cos\omega\tau$$

possiamo riferirci all’equazione della conduzione per la soluzione coniugata:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

Deriviamo ora la temperatura complessa data dalla combinazione lineare:

$$\theta_c(x,\tau) = \theta(x,\tau) + j\theta(x,\tau)$$

soluzione dell’equazione complessa:

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau}$$

con la condizione al contorno:

$$\theta_{co}(0,\tau) = \Delta T e^{j\omega\tau}$$

In forma euleriana la temperatura complessa si scrive nella forma:

$$\theta_c(x,\tau) = X(x) e^{j\omega\tau}$$

Sostituendo questa espressione nell’equazione differenziale complessa e tenendo conto della proprietà dell’esponenziale si ottiene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - j\frac{\omega}{a} X(x) = 0$$

con l’ovvia condizione al contorno:

$$X(0) = \Delta T_0$$

Poiché al tendere ad infinito del tempo la temperatura reale e quella complessa debbono sempre essere finite allora si deve avere $X(\infty) \neq \infty$. La precedente equazione differenziale è notevolmente più par semplice di quella originaria perché è una equazione differenziale ordinaria nella sola X(x) le cui soluzioni dell’equazione caratteristica sono date, per il teorema di De Moivre sulle potenze dei numeri complessi, da:

$$(1\ \ )\ (1\ \ )\quad 2\quad f\quad j\ j\ j$$

$a \; a \; a$

$\omega = \pm + \pi = \pm + \omega$

Pertanto l’integrale generale dell’equazione differenziale diviene:

$(\;) \; (1 \,) \, (1 \,)$

$1 \; 2$

$X \, x \, Ae \, {}_{j f a x} A \; e \, {}_{j f a x}$

$- + \pi + \pi = +$

La condizione della non divergenza della temperatura porta ad avere A_2 =0 e quindi la soluzione
finale diviene:

$(\;) \; (1 \,)$

1

$X \, x \, Ae \, {}_{j f a x}$

$- + \pi =$

La soluzione complessa completa diviene quindi:

$(\;) \; (\,)$

$1 \, ,$

f

$j f a x j a x$

${}_{c} x \; Ae \; e$

$\pi \; \omega\tau \; \pi$

$\theta \; \tau$

$= -$

Ritornando alla forma trigonometrica si ha:

$(\;) \; {}_{1} , \cos \sin$

$x f a$

c

$f f$

$x \, Ae \, x \, j \, x$

$a \; a$

$\theta \; \tau \; {}_{\pi} \omega\tau \; \pi \; \omega\tau \; \pi \; -$

$= \; - \; + \; -$

Se vogliamo la soluzione alla forzante reale (coefficiente dell’immaginaria nella forma complessa)
allora dobbiamo interessarci al coefficiente dell’immaginario anche della soluzione e pertanto si ha:

$(\;) \; {}_{1} , \sin$

${}_{x f a} f$

$x \, Ae \, x$

a

$\theta \; \tau \; {}_{\pi} \omega\tau \; \pi \; -$

$= \; -$

che, per la condizione limite ad ascissa x =0, fornisce:

$(\;) \; {}_{0} 0, \sin$

${}_{x f a} f$

$T \, e \, x$

a

$\theta \; \tau \; {}_{\pi} \omega\tau \; \pi \; -$

$= \Delta \; -$

Si osservi che si ha anche $\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi f}{a}}$ e quindi la soluzione cercata si può anche scrivere nella forma seguente:

$$\theta(x,\tau) = \Delta T_0 \, e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \sin\left(\omega\tau - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

L'andamento della funzione $\theta(x,\tau)$ è riportato nella Figura 14.
La precedente ci dice che la variazione della temperatura ad una distanza x dalla superficie ha sempre lo stesso periodo della variazione di temperatura imposta alla superficie ma di ampiezza decrescente esponenzialmente con la distanza, essendo tale ampiezza data dalla:

$$\Delta T_x = \Delta T_0 \, e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$$

τ ω 0 $2a$

$\Delta T_0 \, e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$

ΔT_0

ΔT_0

x

θ

$\tau=\tau_1$

$\tau=\tau_2$

Figura 14: Andamento delle oscillazioni all'interno dello strato

Lo sfasamento dell'onda di temperatura cambia con x secondo la relazione:

$$\Delta\tau = \frac{x}{\sqrt{2a\omega}}$$

L'onda termica viaggia ad una velocità che è possibile calcolare imponendo che sia:

0 0

2a
ωτ − ω λ =
dalla quale si ricava:
0
v 2 a
λ ω
τ
= =
Pertanto la velocit□ di propagazione dell'onda termica nello strato dipende sia dalla frequenza
(tramite ω) che dalla diffusivit□ termica del mezzo stesso (a).
Il flusso termico specifico che attraversa la superficie esterna vale:
x 0
q
x
λ θ
=
□ ∂ □ = − □ □ □ ∂ □
E tenendo conto della soluzione sopra trovata si ottiene:
0 ( ) sin
4
q T
a
τ λ ω ωτ π □ □ = Δ □ + □
□ □
Pertanto anche il flusso termico □ periodico ed □ sfasato di π/4 rispetto alla temperatura. Se
integriamo la precedente su un semiperiodo nel quale il flusso termico □ positivo (da τ=-π/4ω a
τ=3π/3ω) si ottiene l'energia immagazzinata dal corpo:
3
4
4
0 0
2
sin
4
gw Q T d T
a a
π
π
ω
λ ω ωτ π τ λ
− ω
□ □ = Δ □ + □ = Δ
□ □ ∫

Ne segue che sebbene l'ampiezza del flusso termico sia maggiore per elevate pulsazioni l'energia
termica immagazzinata nel semiperiodo □ tanto maggiore quanto pi□ piccola □ la frequenza
dell'oscillazione di temperatura della forzante esterna.
Le applicazioni delle relazioni qui esposte sono numerose nella Termofisica degli edifici.

Le pareti esterne, infatti, si possono considerare strati di spessore tale da considerare valide le
ipotesi di spessore seminfinito.
Un’onda termica che possiamo assimilare alla variazione periodica sinusoidale (che si ha tutti i
giorni fra il d□ e la notte) porta alla trasmissione all’interno degli edifici con velocit□ data dalla
0
$v\ 2\ a$
$\lambda\ \omega$
τ
$= =$ e con sfasamento dato dalla
2
2
x
a
τ
ω
$\Delta =$.
Anche l’ampiezza dell’onda subisce l’attenuazione e pertanto si conclude che pareti di grande
spessore e con materiali non conduttori attenuano e sfasano molto (come avviene nelle antiche
abitazioni con mura spesse o nelle chiese con mura spesso oltre gli 80 cm).
Viceversa una parete avente poca massa e buon conduttrice (come sono le pareti in calcestruzzo
o le pareti di materiale leggero oggi molto utilizzate nell’edilizia corrente) porta ad attenuazioni e
sfasamenti modesti: la variazioni termiche esterne si trasmettono in breve tempo (entro 0,5□2 ore)
all’interno degli ambienti, diversamente dalle pareti spesse e pesanti che ritardano di alcune ore la
trasmissione dell’onda termica.

2 METODI AVANZATI PER LA CONDUZIONE TERMICA

Lo studio della conduzione termica e in particolare la risoluzione dell’equazione generale della
conduzione nei casi concreti richiede notevoli sviluppi matematici che non sempre si concludono
positivamente. Gi□ con forme reali diverse da quelle geometricamente elementari si hanno sviluppi
matematici notevoli con risultati espressi da serie di funzioni che portano inevitabilmente ad errori di
troncamento.
Allo stesso modo i fenomeni transitori non risultano agevoli da trattare giacch□
alla complessit□par derivante dalla forma geometrica si aggiunge anche la condizione transitoria (presenza del 2□ membro
nell’equazione della conduzione) che porta ad avere una variabile di integrazione in pi□.
Si vedranno in questo capitolo alcuni metodi che definiamo avanzati perch□ solitamente

richiedono strumenti matematici tipici dei corsi superiori di Analisi Matematica. Tali metodi, tuttavia, sono ancora applicati a casi semplici e concreti per non appesantire eccessivamente la trattazione.

Va tuttavia osservato che proprio le osservazioni sopra riportate sulla complessità della soluzione per i casi reali ha portato oggi a sviluppare metodi di risoluzione alternativi (vedi i metodi numeri per la conduzione) che utilizzano algoritmi semplificati, ma con errore controllato, di possibile utilizzo in programmi di calcolo. Il grande sviluppo della trasmissione di calore degli ultimi decenni è dovuto proprio a questi algoritmi.

2.1 METODO INTEGRALE

Questo metodo, la cui validità è generale e si applica anche per la convezione termica, consente di risolvere l'equazione generale della conduzione sia per casi lineari che non lineari.

La soluzione che si ottiene è di solito approssimata ma è importante precisare che l'equazione integrale alla base di questo metodo è di per sé esatta mentre la tecnica risolutiva porta ad avere approssimazioni.

Questo metodo è stato originariamente utilizzato da von Karman e da Pohlhausen per risolvere i problemi della convezione termica (integrazione delle equazioni della conservazione della quantità di moto e dell'energia) ma si applica molto bene anche a tutti i problemi che obbediscono ad equazioni di tipo diffusivo come, ad esempio, nella conduzione non stazionaria nei solidi.

Landahl ha usato questo metodo nel 1953 anche in Biofisica ed in seguito vari ricercatori lo hanno utilizzato per numerosi problemi pratici, specialmente di tipo non lineari, in transitorio termico.

T_p

$\tau = 0$, $T = T_1$

x

Figura 15: Strato piano seminfinito

Si consideri lo strato piano seminfinito di Figura 15 e si supponga che inizialmente sia a temperatura uniforme T_i.

All'istante $\tau=0$ si vari la temperatura della faccia esterna (x=0) con il valore T_p e questo valore sia mantenuto costante anche per $\tau>0$. Assumendo proprietà termofisiche costanti, l'equazione della conduzione in regime variabile monodimensionale (la sola dimensione considerata è la x) diviene:

2
2
T 1 T

$x\ a\ \tau$
$\partial = \partial$
$\partial\ \partial$
con le condizioni limiti:
· T(x,0)=T_p
· lim (,) $_{x\ i}$ $T\ x\ \tau\ T$ $_{\to\infty}$ =
con a diffusivit□ termica della lastra. Definiamo ora una quantit□ δ(τ) detta profondit□ di penetrazione
o anche strato termico in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:
( ) (,)
, e 0 $_i$
T
$T\ T$
x
$\delta\ \tau$
$\delta\ \tau$
∂
= =
∂
In pratica per valori di x oltre δ(τ) il solido □ ancora alla temperatura iniziale T_i e pertanto non si
ha flusso oltre questa profondit□. Integriamo l’equazione della conduzione da 0 a δ(τ) ottenendo:
( ) 2 ( )
0 2 0
$T\ 1\ T$
dx
$x\ a$
δ τ δ τ
τ
$\partial = \partial$
$\partial\ \partial \int\ \int$
Il termine a primo membro diviene:
( ) 2
0 2
0 0
0
$x\ x\ x$
Flusso
$T\ T\ T\ T$
dx
$x\ x\ x\ x$
δ τ
=δ = =
=
$\partial = \partial - \partial = - \partial$
$\partial\ \partial\ \partial\ \partial \int$

Il termine a secondo membro pu□ essere riscritto applicando la regola di Leibnitz:
( ) ( ) ( )

( ) ' ' , (( ),) '( ) ( ), '( )
y
y y
y f x y f y y y f y y y
β
α
Φ = ∫ − α ·α + β ·β
che per α(y) e β(y) costanti diviene:
'( ) ' (,) y y f x y
β
α
Φ = ∫
Pertanto si ha:
( ) ( ) ( ) ( )
0 0
, ,
Ti
T d d
dx T x dx T
d d
δ τ δ τ τ δ τ δ
τ τ τ
=
∂ = −
∂ ∫ ∫
Per quanto detto sulla definizione dello strato δ(τ) si ha anche:
( ) ( ) ( )
0 0
, i
T d d
dx T x dx T
d d
δ τ δ τ τ δ
τ τ τ
∂ = −
∂ ∫ ∫
L’equazione della conduzione integrata diviene, allora, per effetto degli sviluppi sopra esposti:
( ) ( )
0
0
1
, i
x
T d d
T x dx T
x a d d
δ τ τ δ
τ τ =
∂ − ∂ = − ∫
che pu ancora essere scritta nella forma:

( ) ( )
0
0
, i
x
d T
T x T dx a
d
δ τ τ
τ τ =
□□ − □□ = − ∂∂ ∫

Questa è detta equazione di bilancio energetico in forma integrale e rappresenta un modo diverso di
rappresentare il fenomeno della conduzione: non più in forma differenziale ma in forma integrale
rispetto al volume di controllo fra la superficie iniziale e lo strato di penetrazione a profondità $\delta(\tau)$.
Si osservi che questo risultato poteva immediatamente essere dedotto scrivendo il bilancio
energetico nello strato fra $x=0$ ed $x=\delta(\tau)$ e cioè:
( )
0
i
x x
dT dT d
c T T
dx dx δ d
λ λ ρ
τ = =
□ □
− − □− □ = −
□ □
e quindi integrando fra 0 e $\delta(\tau)$ si ottiene la precedente equazione integrale. Si osservi che questa
equazione è del tutto esatta e rappresenta un diverso modo di scrivere l'equazione generale della
conduzione. In questo caso, infatti, il bilancio non è più effettuato per un elemento di volume ma per
un volume finito (detto volume di controllo) compreso fra la faccia esterna ($x=0$) e lo strato di penetrazione (a
profondità $x = \delta(\tau)$). La soluzione di questa equazione, tuttavia, non è agevole poiché, come si può par osservare facilmente, si hanno due incognite contemporaneamente $\delta(\tau)$ e $T(x,\tau)$. E' proprio nel
tentativo di voler risolvere questa indeterminazione che si introducono errori di calcolo che sono però par di piccola entità.
In definitiva assumiamo di conoscere la distribuzione di temperatura $T(x,\tau)$ e risolviamo
l'equazione integrale per trovare $\delta(\tau)$. Poiché il profilo di temperatura non è a priori noto siamo
costretti ad immaginalo sulla base di osservazioni sperimentali o per analogia

con casi similari. E’ questa
la limitazione del metodo. Nel caso in esame si supponga di avere una distribuzione polinomiale della
temperatura, cio supponiamo che sia una distribuzione quadratica del tipo:

$T(x,\tau) = a + bx + cx^2$

I coefficienti polinomiali sono calcolabili imponendo le condizioni al contorno gi indicate.
Si ottengono allora i seguenti valori:

$2 , 2 , c=- _{i\,p\,i\,p}$

p

$T\ T\ T\ T$

$a\ T\ b$

$\delta\ \delta$

$- -$

$= =$

Ne segue che il profilo di temperatura dato dalla relazione:

$(\ )\ {}_2 ,$

$1\ 2\ {}_i$

$p\ i$

$T\ x\ T\ x\ x$

$T\ T$

τ

$\delta\ \delta$

$-\ \ \ \ \ = -\ \ \ + \ \ \ - \ \ \ \ $

Il profilo reale di temperatura non parabilico ma si discosta poco da questo andamento, come si
vedr fra poco. Ora possiamo risolvere l’equazione integrale:

$(\ )\ (\ )$

0

0

$, \ i$

x

$d\ T$

$T\ x\ T\ dx\ a$

d

$\delta\ \tau\ \tau$

$\tau\ \tau\ =$

$\ \ - \ \ = - \partial\partial \int$

essendo T(x,τ) nota. Sostituendo ed effettuando i calcoli si ottiene:

6

d

a

d

$\delta\ \delta$

τ

$=$

poich $\delta(0)=0$, la precedente equazione fornisce:

$\delta = 12 a \tau$

Ora anche la distribuzione di temperatura univocamente determinata.
Il flusso alla superficie (x=0) dato dalla relazione:

$(\ )$

$$q''_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda \frac{T_p - T_i}{\sqrt{3 a \tau}}$$

La soluzione esatta porta al risultato:

$$\frac{T(x,\tau) - T_i}{T_p - T_i} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

e il flusso alla superficie iniziale è dato da:

$$q''_p(\tau) = \lambda \frac{T_p - T_i}{\sqrt{\pi a \tau}}$$

Un confronto con la soluzione approssimata ottenuta con il metodo integrale porta ad valutare l'errore finale che risulta pari al 2.3% e quindi del tutto accettabile nelle applicazioni pratiche. La bontà del metodo integrale deriva dal fatto che esso si propone come un algoritmo generale per la risoluzione di problemi complessi anche non lineari.

Qualora si fosse ipotizzato un profilo di temperatura cubico, iterando lo stesso metodo visto in precedenza, si sarebbe ottenuta una soluzione approssimata con un errore del 6% rispetto alla soluzione esatta. Va detto che non sempre si dispone di una soluzione esatta con la quale paragonarsi ed è per questo motivo che il metodo integrale risulta valido.

Esso, infatti, ci permette di ottenere risultati validi (cio□ con approssimazione accettabile) anche
nei casi difficili dove la soluzione teorica (esatta) non □ possibile trovare. Questo metodo consente di
ottenere soluzioni anche per problemi non lineari quali, ad esempio, il caso di conducibilit□ termica
dello strato variabile o condizioni al contorno non lineari.
Si rimanda alla letteratura tecnica specializzata per lo studio di questi casi.

2.2 METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Un metodo efficace per la soluzione di problemi in transitorio termico monodimensionale □par quella dell’utilizzo della Trasformata di Laplace cio□ di una trasformazione di variabili da reali a complesse
ma con la possibilit□ di risolvere in modo apparentemente pi□ semplice i problemi monodimansionali.

2.2.1 DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Brevemente si ricorda che questa trasformata □ definita nel campo dei numeri complessi dalla
relazione:

( ) (( )) ( ) 0

$F\ p\ £\ f\ \tau\ e\ _{pt} f\ t\ d\tau = = \int _{\infty -}$

ove F(p) □ la trasformata di Laplace e p □ una variabile complessa. La trasformata esiste se l’integrale
sopra indicato converge per alcuni valori di p. In particolare debbono essere soddisfatte le seguenti
condizioni:

· La funzione f(τ) □ continua o continua a tratti in qualunque intervallo $\tau_0<\tau<\tau_1$ con $\tau_0>0$;

· $\lim t_n f(\tau) = 0$ per n tale che sia 0 < n < 1;

· la funzione f(τ) □ di ordine esponenziale γ per t $\rightarrow \infty$.

Ad esempio, si pu□ facilmente calcolare la trasformata di Laplace per casi semplici quale la
funzione lineare τ (con τ >0). Infatti si ha:

( ) 0 2

1

£ e p d

p

$\tau\ \tau\ _\tau \tau = \int _{\infty -} =$

per p>0. Allo stesso modo si ha per f(τ)=1:

( ) 0

1

£ 1 e ptd

p

$\tau = \int _{\infty -} =$

per p>0. Per f(τ)=e$_{\alpha\tau}$ si ha:

( ) 0

1

£ *e e e* $_p$ *d*
p
ατ ατ τ τ
α
= ∞ – =
– ∫
per p>α. Allo stesso modo si procede per f(τ)=sin(ωτ) che fornisce □(sinωτ)=ω/(p□+ω□) con
p>0. Ed ancora □(cosωτ)= p/(p□+ω□).
Tabella 2: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 1□
Sulla base della linearit□ delle definizioni sopra indicate si ha:
( ) ( ) ( ) ( ) 1 1 2 2 1 1 2 2 £ □□*C f* τ +*C f* τ □□ = *C* £ □□ *f* τ □□ +*C* £ □□ *f* τ □□
Nei manuali specializzati (vedasi anche il corso di Teoria dei Sistemi) si hanno tabelle che
forniscono le trasformate di Laplace per un grande numero di funzioni.
Si definisce anche la trasformata di Laplace delle derivate, cio□:

£ ( ) (0)
df
pF p f
*d*τ
□ □ □ □ = –
□ □
per τ > τ1. Analogamente si ha per la trasformata di Laplace di un integrale:
( ) ( ) 0
1
£ *f F p*
p
τ □□□ τ □□□ = ∫
Tabella 3: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 2□
Oltre alla trasformata diretta di Laplace si definisce anche la trasformata inversa, cio□:
f (τ) = £–1 □□*F* (*p*)□□
e quindi deve essere:

( ) ( ) 0
e $_{pt}$ *f t d*τ *F p* ∫ ∞ – =
Nei manuali si hanno tabelle gi□ predisposte che consentono di trovare sia le trasformate dirette
che le inverse.
Per trovare la trasformata inversa di una funzione non presente in tabella si cerca di scomporla in
somma di funzioni semplici delle quali □ facile conoscere le trasformate di Laplace. Un metodo molto
seguito (vedi Teoria dei Sistemi) □ la scomposizione mediante il polinomio di Heaviside. Si dimostra, infatti,

che vale la relazione:

( )

( ) .....

N p A B

D p s a s b

= + +

− −

ove A, B, … sono determinati mediante le relazioni:

( )( )

( ) *s a*

N p s a

A

D p

→

−

=

( )( )

( ) *s b*

N p s b

B

D p

→

−

=

e cos via per gli altri fattori. Noto lo sviluppo di Heaviside si calcolano le trasformate inverse
poich ogni funzione fratta facilmente invertibile mediante le tabelle.

Tabella 4: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 3

2.2.2 APPLICAZIONE AL CASO DELLA PARETE PIANA

Si consideri una parete piana di spessore 2L, avente propriet termofisiche costanti, alla
temperatura iniziale T_i. All’istante τ=0 si cambia la temperatura delle facce esterne portandola al valore
T_w e tale valore sia mantenuto costante per tutto il tempo di evoluzione del transitorio.

Posta l’origine nella mezzeria della parete, l’equazione della conduzione diviene:

2

2

T 1 *T*

x a τ

∂ = ∂

∂ ∂

con le condizioni iniziali:

· T(x,0) = T_i,

· (0,)

0

T

x

∂ τ
=
∂
· T(L,τ) = T_W
Applichiamo il metodo delle trasformate di Laplace trasformando ambo i membri della
precedente equazione:
2
2
1
£ £
T T
x a τ
□ ∂ □ □ ∂ □ □ □ = □ □ □ ∂ □ □ ∂ □
Per le propriet□ della trasformata di Laplace sopra citate si ha:
2 2
2 £
T d T
*x dx*2
□□∂ □□ = □ ∂ □
avendo indicato con *T* la trasformata di Laplace di T:
( ) ( ) ( ) 0
T T x, *p* £ *T x*,τ *e p*τ*T x*,τ *dt* = = □□ □□ = ∫ ∞ −
e ricordando che questa dipende solo da τ e non da x. Inoltre:
£ (,) *i*
T
pT x p T
τ
□ ∂ □ □ □ = − □ ∂ □
Pertanto l’equazione della conduzione trasformata diviene:
2
i d T p T
T
*dx*2 *a a* − = −
Le condizioni al contorno sono ora date da:
· (0,)
0
dT p
dx
=
· (,) *w T*
T L p
p
=
L’avere trasformata l’equazione della conduzione nel piano (x,p) ha portato all’eliminazione del
tempo e quindi ad avere una equazione differenziale nella sola variabile x.
Integrando si ottiene:
( ) ( ) ( ) 1 2 *T x*, *p* = *C* cosh *mx* +*C* sinh *mx*
ove si □ posto m□=p/a e C_1 e C_2 sono le costanti di integrazione che si

determinano con le
condizioni al contorno sopra indicate. In particolare per x=0 si ha C_2=0 e per x =L si ha:

( ) 1 cosh
i w T T
C
p mL
= − −

pertanto si ha:

( ) ( )
( )
cosh
,
cosh
i
i w
T mx
T x p T T
p mL
= −

Per trovare la funzione temporale occorre ora invertire la trasformata di Laplace sopra ottenuta.
Dal confronto con la Tabella 4 si ottiene:

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 2 2
2
2 1
4
1
4 1 2 1
, 1 cos
2 1 2
n n a
L
i i w
n
n x
T x T T T e
n L
π τ π
τ
π
∞ − −
=
− − = − − + + +
Σ

che corrisponde alla soluzione trovata con i metodi tradizionali.

2.2.3 APPLICAZIONE ALLO STRATO SEMINFINITO

Il metodo delle trasformate di Laplace si applica vantaggiosamente anche per lo studio dello
strato seminfinito gi visto in precedenza. L’equazione della conduzione, ponendo $\theta=T(x,\tau)-T_i$, :

2
2
1
$x\ a$
$\theta\ \theta$
τ
$\partial = \partial$
$\partial\ \partial$

con le condizioni al contorno:

· $\theta(x,0) = 0$
· $\theta(0,\tau) = T_w - T_i = \theta_w$
· $\lim (,)\ 0\ {}_x\ \theta\ x\ \tau\ {}_{\to\infty} =$

La trasformazione dell’equazione differenziale della conduzione porta ad avere:

${}_2\ 0$
$d\ p$
$dx\ a$
$\theta - \theta =$

con le condizioni limiti:

· $(x, p)\ {}_w$
p
$\theta = \theta$
· $\lim (,)\ 0\ {}_x\ \theta\ x\ p\ {}_{\to\infty} =$

La soluzione dell’equazione trasformata porta all’integrale generale:

$( )\ {}_{1\ 2}\ \theta\ x, p = C\ e^{-mx} + C\ e^{mx}$

con C_1 e C_2 costanti di integrazione e m =p/a. Le condizioni al contorno portano ad avere $C_2=0$
ed inoltre :

1
$C\ {}_w$
p
$= \theta$

Pertanto si ha:

$(,)\ {}_{mx\ x\ p\ /\ a}$
${}_w$
$x\ p\ e\ e$
$p\ p$
θ
θ
$- -$
$= =$

La trasformazione inversa, mediante la Tabella 3, fornisce il risultato:

$(,)\ (,)$
2
${}_i$
${}_{w\ w\ i}$
$x\ T\ x\ T\ x$
$erfc$
$T\ T\ a$
$\theta\ \tau\ \tau$
$\theta\ \tau$
$-$

= = −

che coincide con la soluzione esatta di Blasius.

2.3 USO DELLE FUNZIONI ORTOGONALI DI STURM - LIOUVILLE

Si dicono ortogonali le funzioni che rispettano la regola:

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,w(x)\,dx = 0 \quad \text{per } m \neq n$$

con w(x) detta funzione peso. Una tipica funzione ortogonale è la funzione trigonometrica sin(x) per
la quale risulta, ponendo la funzione peso pari ad 1:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \text{per } n \neq m$$

si hanno numerose altre funzioni che godono della proprietà dell'ortogonalità fra le quali anche la
funzione cos(x) e alcune finzioni di Bessel.

Queste funzioni sono di grande importanza per la soluzione di una categoria di equazioni
differenziali dette di Sturm – Liouville. Esse sono definite dalla relazione:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda\, w(x)\right]y = 0$$

con le condizioni al contorno del tipo:

$$\alpha_1\, y(a) + \beta_1 \frac{dy(a)}{dx} = 0 \quad \text{con } \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$\alpha_2\, y(b) + \beta_2 \frac{dy(b)}{dx} = 0 \quad \text{con } \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

Le soluzioni delle equazioni di Sturm – Liouville si dimostra che appartengono alla famiglia di
funzioni ortogonali come sopra definite. Le serie di Fourier e le trasformate finite di Fourier rientrano
in queste classi di funzioni ortogonali. Così, ad esempio, l'equazione differenziale, di tipo Sturm –

Liouville:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

con condizioni al contorno:

· y(0) =0

· y(L) =0

è soddisfatta dalla funzione:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

ove si ha:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Analogamente alle serie di Fourier basate sulle funzioni seno e coseno si hanno le serie di Hankel basate sulle funzioni ortogonali di Bessel J(λr) . Queste funzioni sono importanti per la risoluzione di problemi in coordinate cilindriche. Infatti le equazioni generali di bilancio portano ad avere equazioni differenziali della forma:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 r^2 - \nu^2\right) R = 0$$

con le solite condizioni al contorno. La soluzione generale di queste equazioni differenziali è del tipo:

$$R(r) = A J_\nu(\lambda r) + B Y_\nu(\lambda r)$$

con $J_\nu(\lambda r)$ e $Y_\nu(\lambda r)$ funzioni di Bessel di ordine ν.

La serie di Hankel utilizza le funzioni ortogonali di Bessel ed ν della forma:

$$f(r) = \sum_n A_n J_\nu(\lambda_n r)$$

ove i coefficienti A_n sono dati dalle relazioni (del tutto analoghe a quelle della serie di Fourier):

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_\nu(\lambda_n r)\, r\, dr}{\int_0^{r_0} J_\nu^2(\lambda_n r)\, r\, dr}$$

Con la stessa tecnica si possono utilizzare le Trasformate finite di Fourier (dirette ed inverse) per la risoluzione delle equazioni differenziali del tipo Sturm – Liouville.

10 20 30 40 50
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Figura 16: Grafico della funzione $J_0(x)$

10 20 30 40 50
-0.2
0.2
0.4
0.6

Figura 17: Grafico della funzione $J_1(x)$

10 20 30 40 50
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Figura 18: Grafico della funzione $J_0(\sqrt{x})$

Nella Figura 16 si ha l'andamento della funzione $J_0(x)$ mentre in Figura 19 si ha l'andamento della funzione $Y_0(x)$. Si osservi come questo tipo di funzioni ($J_0(x)$ e $Y_0(x)$) siano ad andamento oscillante e smorzato.

In Figura 17 si ha l'andamento della funzione $J_1(x)$ che appare ancora di tipo

oscillatorio
smorzato, come la $J_0(x)$. In Figura 18 si ha l'andamento di $J_0(\sqrt{x})$.
Analogamente in Figura 20 si ha l'andamento di $Y_1(x)$ che appare ancora oscillatorio e smorzato
come la $Y_0(x)$.

10 20 30 40 50
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4

Figura 19: Grafico della funzione $Y_0(x)$

10 20 30 40 50
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4

Figura 20: Grafico della funzione $Y_1(x)$

Le funzioni di tipo $I_0(x)$ ed $I_1(x)$ e le funzioni $K_0(x)$ e $K_1(x)$ sono con andamento smorzato, come
riportato nella Figura 21 e nella Figura 22. Queste funzioni sono le analoghe delle funzioni esponenziali
smorzate (del tipo e^{-mx}).

I0(x)
I1(x)
x

Figura 21: Grafico della funzione $I_0(x)$ e $I_0(x)$

K0(x)
K1(x)
x

Figura 22: Grafico della funzione $K_0(x)$ e $K_1(x)$

Si rimanda ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti sull'argomento.

3 METODI NUMERICI PER LA CONDUZIONE

Si potuto osservare nei capitoli precedenti come la soluzione dell'equazione generale della
conduzione sia molto difficile e complessa non appena si affrontano geometrie che non siano quelle
elementari esaminate. Anzi si pu senz'altro affermare che la soluzione analitica esatta per i casi reali
non ottenibile sia per la complessit dell'equazione del calore sia per la complessit della geometria da
affrontare.
Oggi esistono metodologie risolutive dei problemi di conduzione che possono essere utilizzate
nell'ambito di codici di calcolo elettronici anche di larga diffusione. Fra i metodi utilizzati si hanno
quelli alle differenze finite e agli elementi finiti. Considerate le finalit del presente corso si far cenno
brevemente ai metodi semplificati alle differenze finite rinviando il lettore ai testi specializzati indicati in
bibliografia.

3.1 METODI ALLE DIFFERENZE FINITE

Alla base di questi metodi vi la sostituzione approssimata, nelle equazioni differenziali che
derivano dall'equazione generale della conduzione, delle differenze infinitesime

con differenze finite.
Questo porta ad ottenere, in genere, un sistema di equazioni algebriche che può essere affrontato e risolto con i metodi classici dell’Analisi Matematica.
Naturalmente questa sostituzione non è indolore e comporta sempre l’introduzione di un errore nella precisione del calcolo. I risultati ottenibili con queste metodologie sono oggi molto affidabili e con un errore che può (per quanto compatibile con la precisione del computer utilizzato) essere controllato mediante un’opportuna scelta dei parametri di calcolo e dell’algoritmo di risoluzione. Per la formulazione delle differenze finite si può utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor come qui riportato[9]:

$$T(x_i+h) = T(x_i) + h\left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_i + ...$$

[52]

Si ha anche

$$T(x_i-h) = T(x_i) - h\left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_i + ...$$

[53]

Dalla [52], troncando al secondo termine, si ha:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i+h)-T(x_i)}{h} + 0(h)$$

[54]

e dalla seconda, con analogo procedimento:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i)-T(x_i-h)}{h} + 0(h)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} + 0(h) \qquad [55]$$

Le due ultime relazioni rappresentano delle eguaglianze fra i primi membri (derivate della temperatura calcolate nel punto i) e il secondo membro nel quale compaiono rapporti di differenze finite e un termine, detto errore, del tipo 0(h) cioè del primo ordine.

[9] Vale la pena osservare che la [52] è una identità e quindi il primo membro è eguale al secondo membro e viceversa. Ma è facile convincersi che questa identità è solo teorica ed è normalmente accettata dal nostro cervello per la sua già citata grande capacità di astrazione matematica. E' praticamente impossibile, infatti, sommare infiniti numeri e quindi il secondo membro non è di fatto risolvibile. In genere un problema che pone una simile indeterminazione genera soluzioni non esatte oggi definite caotiche. Alla luce di quanto appena detto appare evidente che la risoluzione numerica che qui si sta affrontando non è una mera semplificazione calcolistica bensì una rivoluzione di pensiero profonda: un problema correttamente posto in modo ideale ma non risolvibile nella realtà trova una modalità risolutiva che appare non formalmente corretta ma che risulta capace di produrre una soluzione reale. In definitiva l'approssimazione che qui si introduce non è una ignoranza metodologica ma una necessità risolutiva conseguente all'indeterminazione effettiva che lo sviluppo di Taylor pone.

Se conoscessimo l'errore[10] 0(h) potremmo utilizzare le differenze finite a secondo membro senza commettere errori. Purtroppo 0(h) dipende dagli sviluppi degli altri termini (infiniti) delle serie che sono stati trascurati e non possono essere calcolati senza effettuare tutti i calcoli (infiniti) necessari.

Pertanto se trascuriamo 0(h) si può solo scrivere:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i + h) - T(x_i)}{h} \qquad [56]$$

e ancora:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} \qquad [57]$$

Si hanno segni circa-eguale e non più eguale e pertanto se sostituiamo i primi membri con i secondi membri (differenze finite) commettiamo certamente un errore che è dell'ordine 0(h). Le due ultime relazioni si possono scrivere, utilizzando una simbologia tipica dell'analisi numerica, nella forma più comoda e compatta:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \qquad [58]$$

e ancora:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \qquad [59]$$

Sono queste due forme possibili di sviluppo alle differenze finite dette, rispettivamente, la [58] differenze finite in avanti (o anche forward) e la [59] differenze finite all'indietro (o anche backward). E' possibile anche ottenere una terza forma facendo la differenza delle [52] e [53] sempre arrestate al secondo termine; si ottiene:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i+h) - T(x_i-h)}{2h} \qquad [60]$$

che viene scritta in forma simbolica nella forma:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \qquad [61]$$

detta differenze finite centrali. Allo stesso modo utilizzando le [52] e [53] con sviluppo arrestato al terzo termine si, facendo la somma membro a membro:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i = \frac{T(x_i+h) + T(x_i-h) - 2T(x_i)}{h^2} + O\left(h^2\right) \qquad [62]$$

Ne consegue che, a meno di errori proporzionali a $0(h^2)$ si può scrivere:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \approx \frac{T(x_i+h)+T(x_i-h)-2T(x_i)}{h^2}$$ [63]

In forma simbolica si può ancora scrivere:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \cong \frac{T_{i+1}+T_{i-1}-2T_i}{\Delta x^2}$$ [64]

10 In realtà non potremmo mai conoscerlo con precisione perché, come detto in precedenza, dovremmo sommare infiniti termini!

che esprime, a meno dell'errore $0(h^2)$, la derivata seconda, calcolata nel punto i, in funzione delle differenze finite. Abbiamo adesso predisposto l'apparato matematico necessario a trasformare l'equazione della conduzione:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$ [65]

in forma algebrica alle differenze finite.

3.2 DIFFERENZE FINITE NELLA CONDUZIONE STAZIONARIA

Si abbia un corpo nel quale si desideri studiare la distribuzione della temperatura, ossia conoscere come varia $T(x,y,z,\tau)$. Si suddivida il corpo (che per semplicità qui raffiguriamo nel piano (x,y)) con un reticolo avente passi Δx e Δy nelle due direzioni. Con riferimento al reticolo alla Figura 23 e partendo dal nodo centrale di figura (indicato con i pedici i,j) si può riscrivere la [6] nella forma esatta, supponendo di essere in regime stazionario e in assenza di sorgenti di calore interne:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

[66]

Δ Δ
Δ
Δ

Figura 23: Reticolo piano per il metodo alle differenze finite

Per trasformare la [66] in equazione alle differenze finite si deve utilizzare la [64] sia per la direzione x che per la direzione y.

In pratica si hanno le seguenti posizioni, perle derivate prime nella forma forward:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad [67]$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \cong \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad [68]$$

e ancora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad [69]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta y^2} \quad [70]$$

per le derivate seconde.

Sostituendo la [69] e la [70] nell’equazione [66] si ottiene:

$$2(\beta + 1)\, T_{i,j} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \beta T_{i,j+1} + \beta T_{i,j-1}$$

ove si è indicato con:

$$\beta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2$$

il fattore di reticolo.

Qualora $\beta=1$ si ottiene la relazione:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

=
che fornisce immediatamente il valore della temperatura nel punti (i,j) note che siano quelle dei
quattro punti ad esso adiacenti (vedi Figura 23).
Questo suggerisce il procedimento di calcolo, sia manuale che automatico, che occorre seguire
per la determinazione delle temperature nei punti di un corpo:

· si traccia un reticolo con passi trasversali e longitudinali eguali ($\Delta x = \Delta y$);
· si fissano le temperature iniziali al contorno (condizione del 1 tipo) o si fornisce qualunque altro
tipo di condizione al contorno (vedi pi avanti);
· si calcola, per ciascun punto interno del reticolo prefissato, la temperatura come media delle
temperature dei punti adiacenti;
· si calcola la differenza (errore) fra il valore ora calcolato e quella del ciclo precedente (tranne per il
primo ciclo di calcolo nel quale, invece, si memorizza il valore calcolato e si azzera l'errore per il punto esaminato);
· calcolate le temperature e gli errori per tutti i punti del reticolo si confronta l'errore di ciascun
punto con quello massimo che si desidera ottenere: se per tutti i punti si ha un errore calcolato
inferiore a quello massimo prefissato allora si possono fermare le iterazioni altrimenti si riprende
dall'inizio e si procede fino a quando la condizione di errore massimo si verificata.

Va precisato, per, che l’errore non pu essere fissato a piacere senza tenere conto della
precisione di calcolo che si pu raggiungere sia con lo strumento di elaborazione utilizzato sia in
conseguenza dei passi di reticolo scelti.
Qualora si desidera avere una precisione maggiore occorre raffittire il reticolo e viceversa.

Se la precisione di calcolo del computer non consente precisioni elevate[11] bene limitare l’errore
massimo desiderato, ad esempio si pu cercare una precisione del decimo di grado o al massimo del
centesimo di grado (seconda cifra decimale!) altrimenti si rischia di avere tempi di calcolo inaccettabili e
soluzioni irraggiungibili.
La determinazione della temperatura nei punti del corpo pu essere ottenuta iterativamente con
l’algoritmo indicato ovvero si pu anche scrivere un sistema di equazioni, una per ciascun punto
incognito, e risolvere il sistema in unico passo di calcolo.
Non si pensi che questa soluzione sia migliore della prima e che con essa si possa trascurare quanto detto a
proposito dell’errore di calcolo. La risoluzione di un sistema algebrico di grandi dimensioni (a seconda dei casi si

va da poche centinaia a migliaia di equazioni da elaborare) porta
intrinsecamente il problema della precisione di
calcolo sia per il tipo di rappresentazione numerica utilizzato (in singola o in
doppia precisione) sia per la
precisione massima di calcolo consentita (numero di byte utilizzato dal
processore).
Inoltre la stessa risoluzione del sistema di equazioni utilizza metodi iterativi
interni alle librerie di
calcolo (ad esempio il metodo della triangolarizzazione,….) che sono
fortemente condizionati dalla precisione
di calcolo utilizzata nel senso che i risultati finali sono dipendenti da questa
precisione.
Se consideriamo un sistema di 1000 equazioni (relativo a 1000 punti interni al
corpo) e si fa
riferimento al metodo di Cramer per la risoluzione allora il determinante del
sistema sar□ la somma di
1000 termini ciascuno composto dal prodotto di 1000 elementi di righe e
colonne diverse della matrice
del sistema. Se ogni numero della matrice □ composto da tre cifre pi□ due
decimali ne risulter□ che i
1000 prodotti saranno dell’ordine di 10^{2x1000} e quindi certamente superiori alla
massima
rappresentazione interna di qualsivoglia computer.
Pertanto □ bene normalizzare la matrice in modo da avere numeri avente parte
intera di una cifra
e parte decimale di cinque cifre. Il problema dell’overflow numerico sussiste
ancora. Meglio utilizzare la
rappresentazione scientifica del tipo X.XXXXXE±YY ma anche in questo caso
l’esponente YY ha un
limite massimo che dipende dalla precisione (ad esempio ±23 per la doppia
precisione nei computer da tavolo).
Qualunque sia il metodo di risoluzione che si intende adottare occorre sempre
considerare con
molta attenzione i problemi di calcolo che ne derivano in relazione alla
precisione consentita dal
computer utilizzato. Non si commetta l’errore di credere che il computer
esegue sempre in modo esatto
i calcoli: si rischia di commettere errori grossolani ed avere spiacevoli sorprese.

3.3 FORMULAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

Se le condizioni al contorno sono del primo tipo (di Dirichlet) allora basta
conoscere la
temperature di tutti i punti che ricadono sulla superficie esterna del corpo da
studiare. Pu□ succedere,
per□, che anche in questo caso si possano incontrare difficolt□ nell’applicare
l’equazione della
conduzione per la tipologia della forma geometrica esterna del corpo.
In generale per determinare le condizioni al contorno (ma anche per arrivare
alle equazioni alle
differenze finite vere e proprie) si pu□ seguire il metodo dell’equazione di
bilancio termico scritta alle
differenze finite.

[11] I computer digitali lavorano sempre con numeri binari e con essi cercano di rappresentare tutte le grandezze che possono elaborare. La precisione di calcolo che □ possibile raggiungere dipende dal numero di bit (cifra binaria che assume valori 0 o 1) che il computer pu□ elaborare per ogni numero. Di solito i bit vengono raggruppati in gruppi di otto detti byte. Nei computer da tavolo (del tipo Personal Computer) il numero di byte utilizzati per i calcoli va da 4 (singola precisione) a otto (doppia precisione). E' chiaro che al crescere dei byte per rappresentare ogni numero reale cresce anche l'occupazione della memoria di calcolo (RAM) utilizzata e pertanto si ha sempre un compromesso fra la precisione e l'occupazione della memoria. Con le tipologie prima indicate le precisioni che si possono ragionevolmente raggiungere sono di due □ tre cifre per la singola precisione e tre □ cinque cifre per la doppia precisione. In pratica l'insieme dei numeri reali esterni non trova una corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri rappresentati nel computer che sono sempre finiti ! Pertanto □ perfettamente inutile cercare una precisione di calcolo che non □ raggiungibile con il sistema di calcolo utilizzato. Nel caso si richieda una precisione eccessiva (e quindi irraggiungibile con il calcolo) si avr□ un ciclo senza fine e quindi occorre sempre inserire un controllo interno al ciclo stesso che consenta di uscire qualora si sia raggiunto un numero massimo prefissato (ad esempio 20) di iterazioni. Con i computer di classe pi□ elevata si possono oggi raggiungere precisioni altrettanto pi□ elevate. E' questo il caso dei computer di grandi dimensioni (supercomputer o mainframe) che utilizzano normalmente 128 o 256 bit (64 byte!) per i calcoli.

Si consideri il caso indicato in Figura 24 nella quale si ha la rappresentazione schematica di un corpo lambito da un fluido avente temperatura T_f e coefficiente di convezione h. Consideriamo il volume[12] tratteggiato (corrispondente a mezzo reticolo adiacente alla superficie lambita dal fluido).

Possiamo scrivere per questo volume (detto di controllo, vedi Figura 24) il bilancio energetico: il calore uscente da esso per conduzione, in regime stazionario e senza sorgente di calore interna, □ pari a quello entrante nel fluido per convezione termica, cio□ si ha:

1, , , 1 , , 1 ( )
,
,
2 2
i j i j i j i j i j
i j f
T T x T T x T Ti j
x h x T T
x x x
λ − λ + λ − Δ − + Δ − + Δ − = Δ −
Δ Δ Δ

Sviluppando questa uguaglianza e ponendo:

x
Bi h
λ
= Δ [71]

detto Numero di Biot[13] si ottiene la relazione desiderata di bilancio energetico:

$$\left(2+Bi\right)T_{i,j} = T_{i-1,j} + \frac{1}{2}\left(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right) + Bi\,T_f \qquad [72]$$

Anche questa equazione è scritta in forma algebrica e può essere utilizzata per risolvere problemi aventi condizioni al contorno del 3° tipo (conduzione più convezione). In genere le condizioni al contorno possono essere di complessa definizione (anche geometrica) in funzione della forma del corpo, della tipologia di scambio (e quindi del tipo di condizione al contorno). Nella seguente Tabella 5 si hanno alcuni casi, fra i più usuali, per i quali si riportano le equazioni esplicite per la determinazione delle temperature ai nodi di contorno.

3.4 CONDUZIONE STAZIONARIA CON SORGENTI DI CALORE

E' un caso direttamente derivato dall'applicazione dell'equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \qquad [73]$$

Le uniche differenze nella risoluzione di questo caso si hanno nella necessità di aggiungere q'''/λ alle equazioni del tipo già viste in precedenza. Si lascia al lettore lo sviluppo.

3.5 CONDUZIONE STAZIONARIA IN GEOMETRIA CILINDRICA

L'equazione di Laplace e di Poisson in geometria cilindrica divengono, rispettivamente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad [74]$$

e ancora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$$

[75]
Sostituendo gli sviluppi alle differenze finite delle derivate prime e seconde espresse in funzione
di r e di z (si lascia al lettore la rielabornazione nelle nuove variabili) la [75] (pi□ generale della [74])
diviene:

12 Si suppone uno spessore unitario del corpo in esame. Del resto abbiamo gi□ detto di rappresentare solamente
una schematizzazione bidimensionale per chiarezza espositiva.

13 Non si confonda il numero di Biot con il numero di Nusselt ($Nu = hL\lambda$), di questo numero adimensionale si
parler□ per la convezione termica) che sembra formulato in modo analogo a Biot. Nel primo caso (Biot) ci si riferisce ad un
coefficiente di convezione h del fluido e ad un coefficiente di conducibilit□ termica λ unitamente al fattore geometrico Δx
del corpo solido. Nel secondo caso (Nusselt) tutti i parametri sono riferiti al fluido nel quale avviene la convezione termica.

1, 1, , 1, 1, , 1 , 1 ,
2 2
2 1 2 '''
0
2
i j i j i j i j i j i j i j i j
i
T T T T T T T T q
r r r z λ
− + + − + − + − − + −
+ + + =
Δ Δ Δ

ove l’asse z corrisponde all’indice j e l’asse r corrisponde all’indice i.

Δ
Δ
Δ
Δ
Δ
Δ
λ

Figura 24: Condizione al contorno del terzo tipo – Convezione esterna

( ) 0 1 2 3
1 1
2 4
T = T + T +T
( ) 0 1 2 3
1 1 '''
2 4 2
q x
T T T T
λ
= + + + Δ
( ) 0 1 2
1
2
T = T +T
( ) ( ) 0 2 3 1 4
1 1

3 6
T = T +T + T +T
( ) 0 1 2
1 1
1 2 f T T T BiT
Bi
[illegible] [illegible] = + [illegible] + + [illegible]
( ) ( ) 0 1 4 2 3
1 1
3 2
T T T T T BiT
Bi
h x
Bi
λ
[illegible] [illegible] = + [illegible] + + + + [illegible]
= Δ

Tabella 5: Condizione al contorno per conduzione stazionaria

3.6 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE MONODIMENSIONALE

Si vuole ora brevemente fare un cenno alle metodologie di calcolo numerico applicate al caso della conduzione in regime variabile. L'equazione da risolvere [illegible] sempre la [65] che per regime in unica dimensione x diviene:

2
2
T T
a
τ x
∂ = ∂
∂ ∂
[76]

Pertanto ricordando lo sviluppo all'indietro della derivata prima dato dalla [59], ora scritta in funzione del tempo τ, si pu[illegible] scrivere :

j 1 j
m m
m
T T T
τ τ
[illegible] ∂ [illegible] + − [illegible] [illegible] ≅ [illegible] ∂ [illegible] Δ
[77]

Il simbolismo utilizzato [illegible] il seguente: il pedice m indica il punto nel reticolo lineare (caso monodimensionale) e l'apice j indica l'istante di tempo per cui j [illegible] l'istante attuale e j+1 [illegible] l'istante successivo.

Lo sviluppo della derivata seconda (dato dalla [64]) ora diviene:

( )
2
1 1
2 2

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_m^j \cong \frac{T_{m+1}^j - 2T_m^j + T_{m-1}^j}{\Delta x^2}$$ [78]

L’equazione della conduzione si scrive quindi nella forma:

$$\frac{1}{a}\frac{T_m^{j+1} - T_m^j}{\Delta\tau} \cong \frac{T_{m+1}^j - 2T_m^j + T_{m-1}^j}{(\Delta x)^2}$$ [79]

Risolvendo rispetto alla temperatura T_m^{j+1} si ottiene l’equazione esplicita:

$$T_m^{j+1} \cong \Delta Fo\left(T_{m+1}^j + T_{m-1}^j\right) + \left(1 - 2\Delta Fo\right)T_m^j$$ [80]

in cui $\Delta Fo = a\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$ è detto numero di Fourier del reticolo.

La relazione [80] ci dice che la temperatura nel punto m al tempi j+1 è funzione della temperatura nei punti m, m+1 ed m-1 al tempo j.

In definitiva si ha una incongruenza di calcolo dovuta alla diversità nel riferimento temperale a due istanti diversi. Ciò comporta la possibilità di avere incongruenze numeriche che non trovano riscontro nell’evoluzione del fenomeno conduttivo.

In pratica può aversi il caso che la temperatura nel punti m intermedio fra m-1 ed m+1 possa non seguire il Secondo Principio della Termodinamica e quindi avere temperature corrispondenti decrescenti in un verso o nell’altro.

Per evitare questa incongruenza (che, si ripete, è solo matematica) occorre, nella[80], imporre che i coefficienti delle temperature di tutti i termini a secondo membro siano positivi. Poiché il numero di Fourier è positivo per definizione deve essere:

$$1 - 2\Delta Fo \geq 0$$ [81]

e quindi deve essere:

$$Fo = \frac{a\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \le 0.5 \qquad [82]$$

Quest'ultima condizione impone una scelta del passo spaziale Δx e del passo temperale $\Delta\tau$ non più in funzione della precisione di calcolo desiderata ma anche in funzione della diffusività termica a del corpo in esame: tanto maggiore è $a\Delta\tau$ tanto maggiore può essere Δx e viceversa.

In termini pratici questo significa che, in condizioni transitorie, il passo spaziale Δx è fortemente dipendente dal tipo di materiale e dal passo temperale e questo può comportare un raffittimento notevole di Δx con conseguenti appesantimento del calcolo complessivo.

3.7 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE BIDIMENSIONALE

La trattazione del caso transitorio bidimensionale segue da vicino quanto visto nel paragrafo precedente.

L'equazione della conduzione ora è nella forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad [83]$$

In forma numerica alle differenze finite diviene:

$$\frac{T^{j+1}_{m,n} - T^{j}_{m,n}}{\Delta\tau} \cong a\,\frac{T^{j}_{m+1,n} + T^{j}_{m-1,n} + T^{j}_{m,n+1} + T^{j}_{m,n-1} - 4T^{j}_{m,n}}{(\Delta x)^2} \qquad [84]$$

nella quale i pedici m ed n indicano le coordinate di reticolo Δx e Δy e l'apice j e j+1 indicano il passo temporale. Ordinando i termini si ottiene l'equazione:

$$T^{j+1}_{m,n} = Fo\left(T^{j}_{m+1,n} + T^{j}_{m-1,n} + T^{j}_{m,n+1} + T^{j}_{m,n-1}\right) + (1 - 4Fo)\,T^{j}_{m,n}$$

$_{-++-}\cong - \Delta + \Delta + + +$ [85]
ove ancora ( )$_2$
$Fo\ a$
x
$\Delta = \Delta\tau$
Δ
e si scelto, per semplicit, Δx = Δy.
Ricordando quanto detto nel 3.6 la condizione di congruenza numerica (cio che i coefficienti delle
temperature a secondo membro debbono essere non negativi) :
1
1 4 0 da cui
4
$- \Delta Fo \geq \Delta Fo \leq$ [86]
La scelta del passo temperale (dati Δx e a) deve essere fatta secondo la [86] e non pi liberamente.
Ci comporta quasi sempre un notevole appesantimento del calcolo.
La formulazione delle condizioni al contorno per il caso non stazionario pu ancora essere fatta
con il metodo del bilancio energetico gi illustrato.
Si tralascia in questa sede lo sviluppo che pu essere trovato nei manuali specializzati di
Trasmissione del Calore.

3.8 METODO GRAFICO DI BINDER SMITH

La [82] suggerisce una semplificazione che trova applicazione nella risoluzione grafica della [80].
Se poniamo la condizione limite:
$\Delta Fo = 0.5$
si ottiene dalla [85] la semplice relazione:
1 1 1
2
$j\ j$
$j\ m\ m$
m
$T\ T$
$T_{+-+} = +$ [87]
Pertanto la temperatura al tempo j+1 la media aritmetica delle temperature all'istante j dei punti
contigui al punto m.
In Figura 25 si ha la rappresentazione grafica dei primi tre intervalli di tempo nel transitorio di
una striscia (problema monodimensionale) avente una temperatura iniziale sul lato a sinistra.

$\Delta\tau$
$2\Delta\tau$
$3\Delta\tau$
To
Figura 25: Costruzione grafica di Binder – Smith

3.9 USO DEI CODICI DI CALCOLO

Oltre al metodo alle differenze finite, sopra esposto, si hanno vari metodi fra i quali si cita quello agli elementi finiti. Il metodo di soluzione delle equazioni alle derivate parziali (PDE) con il metodo agli elementi finiti del tutto generalizzato e viene applicata alla soluzione di qualsivoglia problema matematico e fisico.

Esistono numerosi software commerciali che seguono questa metodologia di soluzione e che contribuiscono a risolvere numerosi problemi reali ben lontani dalla semplicit dimensionale descritta in precedenza.

Applicare un qualsivoglia metodo numerico significa rinunciare ad ottenere la soluzione esatta negli infiniti punti del dominio ma accontentarsi di una soluzione approssimata in un numero finito di punti (che saranno chiamati nodi) individuati con criteri che dipendono dal metodo numerico prescelto.

Il processo con cui si individuano i nodi nel dominio definito “discretizzazione”.

A conclusione della procedura di discretizzazione si perviene sempre ad un sistema di equazioni lineari la cui soluzione consente di ottenere valori approssimati dell’incognita nei nodi. Come si vedr, con il metodo agli elementi finiti tale sistema ottenuto utilizzando formulazioni di tipo integrale del principio di conservazione espresso tramite l’equazione differenziale che si vuole risolvere ed approssimando a tratti la variabile incognita in modo tale che l’equazione stessa risulti soddisfatta mediamente in opportuni sottodomini detti elementi. L’applicazione del metodo comprende i seguenti steps:

· il dominio discretizzato, cio suddiviso in elementi che non devono sovrapporsi n lasciare buchi; il numero e la collocazione dei nodi negli elementi determina poi la tipologia degli elementi stessi;

· in base al tipo di elemento vengono scelte opportune funzioni di forma (o di interpolazione) per l’approssimazione della variabile incognita all’interno e lungo i contorni degli elementi, cio nelle posiziono non nodali;

· per ogni elemento viene formulata un’equazione di tipo matriciale basata su una forma integrale dell’equazione differenziale da risolvere;

· le equazioni di ogni elemento vengono poi “assemblate” per formare un sistema globale di equazioni lineari;

· il sistema globale viene risolto per determinare i valori nodali delle incognite considerate.

Formulare un modello, oppure semplicemente scegliere tra quelli disponibili quello che, con il minimo di complessità, sia in grado di riprodurre in modo soddisfacente l'evoluzione temporale e la distribuzione spaziale delle variabili termofisiche in una determinata distribuzione di flusso termico è un compito tutt'altro che banale. E' necessario, innanzitutto, definire quali siano le proprietà fisiche che caratterizzano il comportamento di materiali e acquisire poi conoscenza fenomenologica degli effetti (l'osservazione visiva ne è una fase fondamentale); ciò comporta l'uso di strumenti e nozioni della fisica e dell'analisi matematica e richiede infine, e soprattutto, cautela e consapevolezza nell'adozione delle ipotesi e delle approssimazioni che è indispensabile adottare.

L'avvento e la diffusione dei calcolatori nel mondo scientifico e tecnologico hanno contribuito, come già evidenziato in precedenza, allo sviluppo e alla crescente consapevolezza del concetto di “approssimazione”: concetto che investe, ad esempio, la teoria dell'approssimazione numerica della soluzione di un sistema di equazioni, ovvero di un modello matematico, con il quale si intende descrivere il comportamento di un determinato sistema fisico. In questo ambito, in mancanza di una soluzione analitica, o esatta, del modello matematico, si accetta di conoscerne una soluzione approssimata che possieda il livello di accuratezza ritenuto sufficiente.

Ma il concetto di approssimazione interviene pesantemente anche nel processo che porta alla formulazione del modello fisico (dal quale discende, poi, quello matematico), che quasi mai può riprodurre per intero la complessità del mondo fisico reale. Infatti il problema che si incontra, ancor prima di pensare ad un modello fisico, consiste nel definire quale sia il livello di scala della realtà.

Il mondo fisico reale può essere infatti descritto a vari livelli, a partire da quello subatomico e passando successivamente a quelli atomico, molecolare, microscopico, macroscopico (quello alla scala dimensionale della meccanica classica) e infine astrofisico (planetario o galattico). Ma non sempre un modello, per risultare efficace, deve necessariamente contemplare la totalità dei livelli di scala della realtà (quello della meccanica classica ne è appunto un chiaro esempio). In pratica, il problema si traduce quindi nel definire quale sia il minimo livello di scala della realtà che debba essere preso in considerazione affinché un modello possa rappresentare la realtà al livello di scala desiderato.

Tuttavia, per definire le proprietà fisiche microscopiche (o statistiche) delle sostanze fluide gassose, che intervengono nel modello di continuo deformabile, pur non

considerando necessariamente
le scale subatomiche, □ necessario per□ dedurle a partire dalla scala atomica o molecolare. E ci□ □par dovuto semplicemente al fatto che tali propriet□ fisiche microscopiche dipendono proprio dalla
struttura atomica e molecolare: dipendono infatti, sia dal tipo, sia dal moto degli atomi, che □ governato
essenzialmente dalle equazioni di Boltzmann.
Solo basandosi sulle scale molecolari □ quindi possibile definire, ad esempio, la temperatura di un
gas come misura dell'energia cinetica media delle molecole, la pressione come risultato degli urti delle
molecole sulle pareti di un recipiente, la viscosit□ attraverso la diffusione della quantit□ di moto
prodotta dall'agitazione termica, e cos□ via (in modo analogo si possono ovviamente definire le
propriet□ fisiche statistiche delle sostanze fluide liquide). A livello di scala molecolare, le variabili
fondamentali del problema (e del modello fisico) sono quindi le masse e le velocit□ delle singole
molecole mentre, a partire dal livello microscopico, le variabili del problema (e del modello fisico)
diventano, ad esempio, la temperatura, la densit□, la pressione e la viscosit□, definibili attraverso medie
delle variabili del modello al livello della scala dimensionale inferiore.
In generale, possiamo affermare che ogni livello di scala della realt□ □ compiutamente
rappresentabile in funzione di un determinato insieme di variabili fondamentali e che misure delle
propriet□ medie di tali variabili consentono di definire le variabili fondamentali al livello di scala superiore,
immediatamente successivo.
Si rinvia ai testi specializzati l’approfondimento di questi metodi di calcolo e si vuole qui
presentare qualche esempio.

Distribuzione di temperatura in un isolatore contenente due tubi di acqua calda
La geometria □ ancora semplice anche se non risolvibile con procedure analitiche tradizionali. Si
tratta, nel piano, di una circonferenza esterna (isolante) contenente due circonferenze affiancate interne
(tubi). L’equazione differenziale da risolvere □:

$$div\left(-\lambda\ grad\left(T\right)\right)=0$$

Le condizioni iniziali sono: T= 273 K per la zona esterna (isolante), 323 K per la tubazione a
sinistra e 353 K per la tubazione a destra. La griglia di calcolo □ la seguente:
Figura 26: Formazione della griglia di calcolo per l’esempio considerato
La distribuzione della temperatura □ data nella seguente figura
Figura 27: Curve isoterme per l’esempio analizzato

Figura 28: Distribuzione spaziale della temperatura

Figura 29: Distribuzione del flusso

Numerosi altri esempi potrebbero essere qui presentati. Va considerato che i problemi di sola conduzione sono relativamente semplici nel panorama dei codici di simulazione commerciali. Questi sono orientati alla soluzione di problemi di CFD (Computer Fluid Dynamics) molto pi□ complessi di quelli esposti in questo paragrafo.

Si parler□ di questi codici di calcolo pi□ avanti.

4 ALETTE

Uno dei dispositivi pi□ utilizzati nello smaltimento del calore in dispositivi meccanici e/o elettronici sono le alette costituite da lamine di materiale buon conduttore poste sopra la superficie di un corpo che si vuole raffreddare in aria o in un fluido gassoso.

E’ importante osservare subito che, come si dimostrer□ pi□ avanti, le alette risultano convenienti solo quanto lo scambio di calore all’esterno della superficie da raffreddare □ attuato in aria o in un fluido aeriforme generico. Questo, infatti, per le sue caratteristiche termofisiche determina modalit□ di scambio per convezione peggiori di quelle che si avrebbero con un fluido liquido e pertanto le alette consentono di migliorare lo scambio globale.

Per studiare il comportamento delle alette occorre idealizzare il problema come raffigurato in Figura 30. Sia questa idealizzata come una sbarra di sezione rettangolare attaccata ad una parete a temperatura T_0.

L’aletta sia sottile e la conducibilit□ termica del materiale elevata in modo che si possa ritenere a resistenza termica trascurabile e quindi descrivibile con un solo valore di temperatura per ogni sezione x.

x x+dx
x
T
0

Figura 30: Schematizzazione di una aletta

Per la generica sezione ad ascissa x ed x + dx, detta S la superficie e P il perimetro, si pu□ scrivere che il flusso termico di conduzione alle ascisse x ed x + dx valgono::

$$q_x = -\lambda S \left(\frac{dt}{dx}\right)_x \quad [88]$$

$$q_{x+dx} \; S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$$

λ +
+
= −
Sviluppando in serie di Taylor il secondo membro della precedente si ottiene:
2
x dx 2 x
x
dT d T
q S S dx
dx dx
λ λ + = − −
Pertanto il bilancio termico (a regime stazionario) della striscia elementare di ampiezza dx ad ascissa
x il seguente:
( ) 2
2 f
d T
S dx hP T T dx
dx
λ = −
Semplificando e ponendo $\theta = T - T_f$ ed ancora :
hP
m
λ S
=

si pu scrivere:
2
2
2 0
d
m
dx
$\theta - \theta =$
Nell’ipotesi di propriet termofisiche e geometriche costanti la precedente si pu ritenere una
equazione differenziale del secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti il cui integrale generale :
$\theta = Ae^{-mx} + Be^{mx}$ [89]
con A e B costanti di integrazione da calcolare con le ipotesi di condizione al contorno da
definire ancora. Possiamo ipotizzare tre casi.

4.1 BARRA INFINITAMENTE LUNGA

In questa ipotesi la temperatura nella sezione terminale della barra si porta in equilibrio con quella
del fluido e pertanto risulta:
$\theta_0 = T_0 - t_f$ per x=0
e ancora
$\theta = 0$ per x $\rightarrow \infty$
Pertanto la [89] diviene:
$\theta = \theta_0 e^{-mx}$
Quindi la differenza di temperatura iniziale diminuisce esponenzialmente. Il

flusso termico che la
sbarra smaltisce nel fluido allora pari, a regime stazionario, al flusso che esce dalla parete all’ascissa
x=0 e cio:
0 0
0
l
x
dt
$q\ S\ Sm\ hP\ S$
dx
$\lambda\ \lambda\ \theta\ \lambda\ \theta$
$=$
$= - = =$
Senza la presenza dell’aletta la stessa parete avrebbe disperso, attraverso la superficie S il flusso:
$_{s\ 0}\ q = hS\theta$
La convenienza dell’aletta si ha quando si verifica:
$_{l\ s}\ q > q$
ovvero anche:
$_{0\ 0}\ \lambda\ Sm\theta > hS\theta$
ossia quando $m > h\lambda$. Ricordando l’espressione di m deve anche essere $\lambda\ P > hS$.
Pertanto la
convenienza dell’utilizzo dell’aletta si ha quando il materiale un buon conduttore (grande λ) ovvero il
coefficiente di convezione h piccolo. In pratica si pu anche scrivere:
S
h
P
$\lambda >$
per cui essendo il rapporto S/P omogeneo ad uno spessore fittizio l_0 si pu ancora scrivere:
$_0\ l\ 1$
$\lambda\ h$
$<$
Quindi la resistenza di conduzione l_0/λ
deve essere inferiore alla resistenza di convezione 1/h.

4.2 SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA

In questo caso le condizioni al contorno sono:
$_{0\ 0}$ per $\theta = T - t_f$ x=0
e ancora:
0 per x
$_{x\ L}$
d
L
dx
$\lambda\ \theta$
$=$
$- = =$
La soluzione dell’equazione generale fornisce le costanti:
0
mL
$mL\ mL$

$$A = \frac{\theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$B = \frac{\theta_0 e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

e quindi la soluzione diviene:

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh\left(m(L - x)\right)}{\cosh(mL)}$$

Il flusso termico uscente dalla parete all’attacco della sbarra vale:

$$q_0 = -\lambda S \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = \lambda m S \theta_0 \tanh(mL)$$

La convenienza dell’aletta si ha quando questo flusso risulta superiore a quello senza aletta.

4.3 SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE)

Le condizioni al contorno divengono:

$\theta_0 = T_0 - t_f$ per x=0

e ancora:

$$-\lambda S \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = hS\theta_L \quad \text{per x} = L$$

Le costanti di integrazioni divengono:

( ) ( )
0
2 cosh
mL h mL

$e\ e$
$A\ m$
h
$mL\ senh\ mL$
m
$\theta\ \lambda$
λ
$+$
$=$
$+$
$(\ )\ (\ )$
0
$2\cosh$
$mL\ h\ mL$
$e\ e$
$B\ m$
h
$mL\ senh\ mL$
m
$\theta\ \lambda$
λ
$- - -$
$=$
$+$
Pertanto la soluzione generale (detta di Ten Bosh) diviene:
$(\ )\ (\ )$
$(\ )\ (\ )\ 0$
$\cosh$
$\cosh$
h
$m\ L\ x\ senh\ m\ L\ x$
m
h
$mL\ senh\ mL$
m
$\theta\ \theta\ \lambda$
λ
□□ − □□ + □□ − □□
$=$
$+$

Il flusso termico all’attacco dell’aletta vale:
$(\ )$
$(\ )\ 0$
$0\ 1$
l
x
h
$q\ S\ d\ mS\ m\ tagh\ mL$
$dx\ h\ tagh\ mL$

m
$\lambda\ \theta\ \lambda\ \theta\ \lambda$
λ
$=$
$+$
$= - =$
$+$
con il solito confronto si può stabilire la convenienza dell’aletta.

4.4 EFFICIENZA DELLE ALETTE

Si definisce efficienza delle alette il rapporto fra il flusso effettivamente scambiato e quindi
uscente dalla parete con l’aletta e quello che si avrebbe nelle condizioni ideali con temperatura di aletta
pari a quella della base di attacco, cioè:
$reale$
$ideale$
q
q
$\varepsilon =$
Nel caso di aletta con flusso trascurabile all’estremità (caso 2, generalmente realizzato con buona
approssimazione nelle condizioni reali) si ha:
$(\ )\ (\ )\ _0$
0
$S\ m \tanh\ mL\ \tanh\ mL$
$hPL\ mL$
$\lambda\ \theta$
ε
θ
$= =$
In Figura 31 si ha l’andamento dell’efficienza per alette rettangolari. Per le alette sottile si ha:
0 1 2 3 4 5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.999
0.2
$\varepsilon(m\,L)$
0.05 m L 5
Figura 31: Efficienza di una aletta rettangolare
h
$mL\ L$
$\lambda\ \delta$
$= \cdot$
e quindi l’efficienza è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza L e quanto maggiore è il suo
spessore 2δ e quanto maggiore è la conducibilità λ del materiale e quanto minore è il coefficiente di
convezione termica h. Nota l’efficienza dell’aletta si calcola facilmente il flusso reale mediante la
relazione:
$$q_{reale} = \varepsilon \cdot q_{ideale} = \varepsilon\, h\, S \theta_0$$
Se si prende in considerazione la soluzione di Ten Bosh si ha:
$\tanh(\ )$

tanh( )
h
mL
m
hL
mL mL
ε λ
λ
+
=
+
il cui andamento riportato in Figura 32.

4.5 PARETE ALETTATA

Nel caso che una parete di superficie A con n alette sia immersa nell'ambiente, detta ε l'efficienza
delle alette, il flusso totale disperso vale:

$$q = h_s\left(A_t - nS_a + \varepsilon nS_L\right)\left(T_0 - T_f\right)$$

avendo indicato con A_t l'area totale della superficie, S_a la superficie di attacco di una singola aletta,
S_L la superficie di scambio di una aletta, T_0 la temperatura della superficie e T_f quella dell'ambiente.

0 1 2 3 4 5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.019
0.201
$\eta(m L, \lambda, h, L)$
0.15 m L 5

Figura 32: Efficienza di una aletta rettangolare con soluzione esatta

Per la validit di questa relazione occorre assicurarsi che la distanza fra le alette sia superiore (di
almeno il doppio) a quello dello strato limite che, per valori correnti in aria, di 2÷3 mm.

4.6 ALETTE ANULARI

Si consideri una superficie circolare come indicato in Figura 33 e si faccia l'ipotesi di piccolo
spessore, H, rispetto alla lunghezza netta dell'aletta $L=r_2-r_1$.
Nell'ipotesi di resistenza termica delle alette trascurabile si pu immaginare che il campo termico sia
monodimensionale e che pertanto la distribuzione della temperatura sia funzione solo del raggio r, ciopar sia T =T(r).
La sezione trasversale dell'aletta $A_s=2\,\pi\, r\, H$ e la superficie relativa al tratto di lunghezza dr vale
$dA_s = 2\,\pi r\, dr$.
Il flusso trasmesso ad ascissa r vale:
2 r r
r r
dT dT
q A rH
dr dr

= −λ = −λ π
e che quello ad ascissa r + dr vale:
2 ( ) r dr r dr
r dr r dr
dT dT
q A r dr H
dr dr
λ λ π + +
+ +
= − = − +
ove, sviluppando in serie di Taylor si ha:
2
2
r dr r r
dT dT d T
dr
dr + dr dr
= +
e che il flusso disperso per convezione termica dalla aletta vale:
( ) a f s dq = h T −T dA
Pertanto il bilancio termico di una striscia dr ad ascissa r dato da:

r a r dr q q q + = +
e quindi, sostituendo le espressioni precedenti e riarrangiando i termini si ha:
( ) ( ) ( )
2
2
1
2 0 f f
f
d T T d T T h
T T
dr r dr λ H
− −
+ − − =
Abbiamo, quindi, una equazione differenziale di Bessel di ordine zero la cui soluzione generale :
( ) ( ) f 1 0 2 0 T −T = C I mr +C K mr
ove si posto, al solito:
r1
r2
H
Figura 33: Rappresentazione di una aletta circolare di spessore costante
2h
m
λ H
=
e si sono indicate con:
· K_0 la funzione di Bessel modificata di prima specie;
I_0 la funzione di Bessel modificata di seconda specie.
Le costanti di integrazione vanno determinate con le condizioni al contorno:
1 0 T(r) = T
alla base di attacco e ancora per r=r_2:

2
2
0 r r r
r r
dT
q A
dr
λ =
=
= − =
cio supponiamo che all’estremit delle alette il flusso sia trascurabile (come gi visto per le alette
rettangolari).
L’andamento della soluzione rappresentata in Figura 34.

1 2 3 4 5
1
2
3
4
5
6
Figura 34: Distribuzione della temperatura nelle alette cilindriche
L’efficienza di un’aletta anulare data in Figura 35 al variare del rapporto dei raggi.
Figura 35: Efficienza alette anulari
4.7 PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE
In precedenza si visto il caso semplice di profilo rettangolare delle alette.
In effetti al crescere della distanza dalla parete il profilo rettangolare non consente le migliori condizioni di scambio poich presenta la stessa resistenza termica di conduzione pur con profilo di temperatura che decresce esponenzialmente dalla parete di attacco.
Uno studio pi approfondito consente di dimostrare che la sezione migliore quella con profilo iperbolico, cio con andamento rastremante verso la fine delle alette, come illustrato dal secondo profilo in Figura 36.
Questa sezione consente anche di ridurre al minimo il materiale presente nelle alette.
Nelle applicazioni pratiche si preferisce costruire le alette con profilo triangolare per le minori difficolt costruttive che queste presentano e per la poca differenza rispetto a quella iperbolica.

Figura 36: Profilo rettangolare, iperbolico e triangolare
4.8 APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE
Con i codici di simulazione gi visti in precedenza possibile risolvere i problemi relativi alle alette. Ad esempio per una sezione di tubo con flangia raffreddata esternamente, con equazioni gipar indicate nei precedenti paragrafi, da aria porta alle seguenti soluzioni.
Figura 37: Griglia di calcolo

Figura 38: Distribuzione della temperatura in una flangia
Figura 39. Distribuzione del flusso per un tubo flangiato

5 LA CONVEZIONE TERMICA

Uno dei problemi tecnico-scientifici in assoluto pi□ complesso da studiare □ la convezione termica. Con questo termine si suole definire un insieme di fenomeni di trasporto di massa ed energia per mezzo di un fluido riscaldato (o raffreddato).

La convezione termica □ stata originariamente studiata da Newton che ne ha proposto una formulazione funzionale ancora oggi utilizzata nella pratica. Newton non aveva i mezzi di osservazione che oggi noi possediamo e pertanto non poteva rendersi conto della complessit□ del problema della convezione termica.

In particolare Egli non si accorse dello strato limite (vedi Figura 40) meccanico e termico che si formava fra fluido non disturbato e parete.

Figura 40: Formazione dello strato limite dinamico sopra una lastra piana

La convezione termica nasce dall'azione congiunta di trasporto di materia e di energia. Il termine convezione deriva dal latino conveho che significa trasporto. Senza materia in movimento non si pu□ avere convezione termica ma solo conduzione. La convezione termica pu□ essere di due tipi:

Convezione termica naturale:

Il movimento di materia si origina per effetto del solo campo di temperatura esistente fra zone diverse di un sistema termico. Se consideriamo una piastra piana verticale di materiale conduttore qualunque (ferro, rame, alluminio,...) portata ad una temperatura T_p. Si supponga che questa piastra sia immersa in un fluido (aria, acqua,..) avente una temperatura $T_f < T_p$ (vedi Figura 41).

Per effetto della temperatura T_p dell'energia termica passa per conduzione dalla piastra al fluido che si scalda rispetto alla temperatura iniziale T_f e pertanto si dilata. Ci□ porta ad avere una diminuzione di densit□ del fluido caldo rispetto a quello freddo e quindi si genera, per effetto della forza di gravit□par che agisce sempre verso il basso, un alleggerimento termico che fa spostare il fluido caldo verso l'alto e quello freddo verso il basso e quindi un moto rotatorio orario che □ il flusso convettivo propriamente detto.

Il moto rotatorio orario generato dalla forza di gravità che sposta pi in basso il fluido freddo
rispetto a quello caldo. Questo spostandosi porta con s la maggiore energia interna dovuta alla
maggiore temperatura e pertanto si ha il trasferimento di calore dalla piastra al fluido freddo come
effetto finale della trasmissione di calore. E' bene ricordare che nella convezione naturale il movimento del
fluido avviene per il solo effetto della forza di gravit sugli strati di fluido a diversa densit;
Convezione forzata
Il movimento del fluido avviene non solo (o anche non pi) per effetto dell'alleggerimento termico
sopra descritto ma per l'azione meccanica di una macchina sul fluido (ad esempio una pompa o una ventola).
Pertanto il fluido non si sposta pi in relazione alla distribuzione di temperatura e all'azione della forza
di gravit bens per azione meccanica esterna. Ne consegue che il movimento del fluido pu essere
pilotato come si desidera nelle zone ove si vuole avere lo scambio termico.

Se si riprende l'esempio del radiatore termico domestico dianzi proposto si vede facilmente che
senza azioni esterne si ha il movimento dell'aria riscaldata dalla piastra secondo traiettorie che
dipendono solo dalla geometria del sistema e dalle differenze di temperature.
Se, invece, si utilizza una ventola a monte della piastra ecco che l'aria riscaldata pu essere inviata
dove si vuole e in quantit desiderata. Si ha, cos, la convezione forzata. In entrambi i casi (naturale o forzata)
la convezione si presenta come una somma di fenomeni complessi associati sia
al campo di velocitpar (spostamento delle masse di fluido) che al campo di
temperatura (direttamente e indirettamente legato al campo di
velocit).
Si tratta sempre di fenomeni molto complessi che rappresentano una delle
problematiche pipar ardue di tutta la Scienza e la Tecnica. Queste
problematiche non sono limitate solamente agli scambi
termici, come questo capitolo pu far pensare, ma a numerosissimi campi della tecnica, della biologia,
della meteorologia, armamenti militari, ….
Praticamente ogni campo scientifico interessato dai problemi convettivi e la loro risoluzione ha
sempre avuto caratteri strategici prevalenti su tutti gli altri. Data la limitatezza di questo corso di
Trasmissione del Calore si cercher di semplificare al massimo la soluzione di queste problematiche con
metodologie di studio semplificate.
Nella realt lo studio della Convezione Termica sempre stato un argomento arduo, difficile, ostico
e che solo in parte trova soluzione oggi con l’utilizzo di codici di calcolo costosi e complessi che

richiedono le maggiori risorse in assoluto rispetto a qualsivoglia applicazione software.
Convezione termica confinata
Se il fluido si trova all’interno di un volume delimitato da pareti fisiche, ad esempio in un
condotto, allora la convezione termica si dice confinata.
Lo spessore dello strato limite termico, come pure quello dinamico, □ al massimo pari alla
distanza fra le pareti a diversa temperatura.
In questo caso le condizioni di conservazione della massa impone che ci sia una circolazione
interna (vedi anche quanto si dir□ sulle cavit□ termiche) fra le stesse pareti.
Convezione termica aperta
In questo caso si ha una parete e la convezione termica avviene in uno spessore di strato limite
termico indefinito e sempre crescente.
Si pu□ avere anche convezione termica in assenza della stessa parete ma in presenza di fluidi a
diversa temperatura (ad esempio una corrente di aria calda che incontra una corrente di aria fredda o anche un getto di
vapore che trascina aria fredda in moto convettivo, come avviene nei getti e nei pennacchi dei quali si dir□ nel prosieguo).
La convezione aperta interessa molto la climatologia e le applicazioni impiantistiche ambientali.

5.1 EQUAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA

Newton ebbe il grande merito di semplificare la grande complessit□ del problema (non sappiamo se
coscientemente o non) scrivendo per la convezione termica la seguente legge di definizione:

$\Delta Q^* = hS(T_p - T_f)\Delta\tau$ [90]

ove si ha il seguente simbolismo:

· ΔQ^* quantit□ di energia trasmessa per convezione termica. Unit□ di misura [J] o [kcal];
· h □ il coefficiente di convezione. Unit□ di misura [W/(m_2□C)] o [kcal/(hm_2□C)];
· S superficie di scambio termico. Unit□ di misura in [m_2];
· $T_{p,}$- T_f differenza di temperatura fra piastra e fluido (o viceversa se $T_f > T_p$). [K] o [□C];
· $\Delta\tau$ tempo intercorso, unit□ di misura [s] o [h].

Si □ usato il termine di definizione perch□ questa legge in realt□ definisce univocamente il coefficiente di
convezione nella forma:

$*$
$(\ )\ _{p\,f}$
Q
h
$S\ T\ T\ \tau$
$= \Delta$
$- \Delta$

In pratica, come meglio si vedr□ pi□ avanti, non conosciamo h se non mediante il rapporto

indicato a secondo membro. E questo perch le modalit di scambio termico non sono univoche, nel
senso che una stessa parete con le stesse distribuzioni di temperatura superficiale e con lo stesso fluido
pu dar luoghi a scambi di calore diversi a seconda della geometria e topologia assunta.
Ecco perch la legge di Newton importante: essa ha semplificato la definizione analitica di un
fenomeno complesso con una semplice introduzione di un coefficiente di convezione noto il quale si pupar conoscere il flusso termico effettivamente scambiato. Possiamo definire questo anche un coefficiente di
ignoranza, anche alla luce di quanto si dimostrer nel prosieguo.
Il coefficiente h non una propriet termofisica ma dipende da un grande numero di fattori fra i
quali si ricordano:

· le propriet fisiche del fluido: densit ρ, viscosit dinamica μ (vedi pi avanti), calore specifico a
pressione costante c_p, coefficiente di conducibilit termica λ;
· la differenza di temperatura fra i corpi;
· la velocit del fluido w se in convezione forzata o il coefficiente di dilatazione[14] cubica β del fluido se si
 in convezione naturale;
· la geometria della scambio termico che pu essere rappresentata da un parametro geometrico (ad
esempio il diametro di un condotto, la distanza fra due piastre,....).

Per rendersi conto che h varia con la configurazione geometrica, come sopra accennato, a paritpar di tutto il resto, si consideri l'esempio dato in Figura 41.

Tp
Tf
x
y
Fluido non disturbato
Parete
Strato limite termico
Profilo di velocita'
Profilo di temperatura

Figura 41: Schematizzazione della convezione termica fra parete e fluido

Se la piastra si suppone calda e il fluido, per esempio aria, freddo si ha convezione (cio si ha
movimento di fluido per via naturale) se la piastra orizzontale in basso o verticale o con un angolo di
inclinazione qualunque.
Non si ha convezione termica se la stessa piastra, a pari temperature e condizioni del fluido, si
pone orizzontale ma in alto rispetto al fluido (ad esempio un soffitto caldo) perch il fluido dilatato gi in
alto rispetto a quello freddo che si trova in basso.

[14] Si definisce coefficiente di dilatazione di un corpo, come si visto in Termodinamica Applicata, il coefficiente
$\beta = \partial$
∂
FH G

IK J1
v
v
t p
cio la variazione relativa di volume al variare della temperatura e pressione costante. Questo coefficiente par propriet termofisica dei corpi e lo si pu trovare nei manuali tecnici specializzati. Per un gas ideale esso vale 1/T (con T temperatura assoluta) e quindi per i gas si pu ritenere β circa pari al suddetto valore.

Quindi non possibile conoscere il coefficiente di convezione dati i soli parametri termofisici del fluido e le temperature di scambio: occorre specificare anche la geometria di scambio e ci rende di fatto lo studio della convezione termica molto complesso.

Se si fa riferimento al flusso termico (ΔQ*/Δτ) (omogeneo ad una potenza [J/s]=[W]), la [90] si pupar ancora scrivere:

$$\Delta Q = h\, S\, \Delta T$$

· ove ΔT la differenza di temperatura (maggiore meno minore) fra corpo e fluido.

La suddetta relazione, pur nella sua grande semplicit, non ci consente di affrontare la convezione termica con la stessa semplicit con la quale abbiamo affrontato la conduzione termica poich h, come gi detto, non una propriet termofisica reperibile nei manuali per i vari materiali.

Questo coefficiente deve essere determinato, sperimentalmente o analiticamente, per tutte le configurazioni di scambio che si intende utilizzare. Oggi si dispongono di migliaia di relazioni per il calcolo di h e sempre pi questo numero cresce con l'aumentare dei casi reali di scambio studiati. Per il flusso termico specifico q" = ΔQ/S si ha la relazione:

$$q" = h \cdot \Delta T \quad [91]$$

5.2 RESISTENZA TERMICA PER CONVEZIONE

Con ragionamento analogo a quanto visto per la conduzione termica, riscrivendo opportunamente la [91], si pu definire una Resistenza termica di Convezione data dalla seguente relazione:

$$R = \frac{1}{h}$$

con il solito simbolismo visto in precedenza. Mediante la resistenza termica per convezione par possibile risolvere qualsiasi problema di trasmissione del calore fra strati in serie e in parallelo.

5.3 TRASMITTANZA TERMICA

Si consideri la situazione indicata in Figura 42 ove si hanno due fluidi separati da una parete, ad
esempio si può considerare un muro esterno che separa l’ambiente interno (e quindi l’aria all’interno di
esso) dall’ambiente esterno (cioè dall’aria esterna). Considerando una situazione a regime stazionario si ha,
essendo tutti gli elementi disposti in serie, che il flusso termico è costante sia nel fluido 1, che negli
strati di parete e poi nel fluido 2. Applicando quanto è stato detto per la trasmissione del calore in serie
si può scrivere la seguente relazione :

1 1 1 2 2 3 3 2
1 2
1 1 2 2
"
1 1
p p p p p p T T T T T T T T
q
s s
h λ λ h
− − − −
= = = =

Applicando la regola del componendo ai secondi membri si ottiene infine la seguente relazione:

1 2
1 2
1 1 2 2
"
1 1
T T
q
s s
h λ λ h
= −
+ + +
[92]

e il termine:

1
1 j
i j
K
s
h λ
=
Σ + Σ
[93]

è detto trasmittanza termica.

T1
T2
Tp1 Tp2 Tp3
h1
h2
λ 1 λ 2

Figura 42: Trasmissione del calore fra due fluidi separati da una parete

composta.
A denominatore si hanno le sommatorie delle resistenze termiche per convezione interne alla parete, per conduzione e per convezione esterne alla parete. Dalla [92], tenuto conto della [93], si può par scrivere:

$$q'' = K \cdot \Delta T$$

e per il flusso totale attraverso la parete:

$$q'' = \frac{\Delta T}{\sum_j \frac{1}{h_j} + \sum_{ij} \frac{s_i}{\lambda_i}}$$

5.4 LE EQUAZIONI FONDAMENTALI PER LA CONVEZIONE

Per affrontare lo studio della convezione termica occorre prima predisporre l'apparato fisico matematico per la piena descrizione fenomenologica. Troviamo, quindi, le equazioni descrittive dei fenomeni fisici fondamentali che interessano la convezione termica e per fare ciò applichiamo, pertanto, i principi fondamentali della Termodinamica e della Meccanica dei Fluidi.

5.4.1 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Il principio di conservazione della massa porta a scrivere, per un sistema aperto:

$$\dot m_e - \dot m_u = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V dm$$

In forma integrale possiamo scrivere:

$$-\int_A \rho \, \vec V \cdot \vec n \, dA = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho \, dV$$

Ricordando il teorema della divergenza di Green si può ancora scrivere:

$$-\int_V div\left(\rho \vec V\right) dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho \, dV$$

Ovvero anche, in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -div\left(\rho V\right)$$

[94]

Introducendo l’operatore derivata sostanziale dato da:

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

allora la [94] si pu scrivere nella forma:

$$\frac{D\rho}{D\tau} + \rho \nabla \cdot V = 0$$

[95]

Questa detta equazione di conservazione della massa in forma differenziale.

5.4.2 CONSERVAZIONE DELL’ENERGIA

Il primo principio della Termodinamica per un sistema aperto in forma integrale pu essere derivato da quanto gi visto per sistemi aperti con scambi di materia in corrispondenza a tubi di flusso finiti. Con riferimento alla Figura 43 si pu scrivere il bilancio:

$$m_1\left(gz_1 + p_1v_1 + e_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) + Q - L - m_2\left(gz_2 + p_2v_2 + e_2 + \frac{w_2^2}{2}\right) + Q_{sorgente} = \frac{\partial E_\sigma}{\partial \tau}$$

ove risulta, per l’accumulo a secondo membro:

$$\frac{\partial E_\sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{M_s}\left(gz + u + e + \frac{w^2}{2}\right)dm$$

In forma integrale la precedente equazione può essere scritta nella forma:

$$-\int_A \left(h + \frac{w^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA - \int_A \vec{q}\cdot\vec{n}\, dA + \int_V \dot{q}\, dV - L' = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_V e\rho\, dv \qquad [96]$$

ove si ha:

SUPERFICIE DI SEPARAZIONE
LAVORO USCENTE L'
CALORE ENTRANTE Q'
MASSA ENTRANTE
MASSA USCENTE
SISTEMA

$$m_1\left(\frac{w_1^2}{2} + g z_1 + u_1 + p_1 v_1\right)$$

$$m_2\left(\frac{w_2^2}{2} + g z_2 + u_2 + p_2 v_2\right)$$

$$E_\sigma = \int_M \left(\frac{w^2}{2} + g z + u\right) dm$$

Figura 43: Sistema aperto con flussi localizzati

$$-\int_A \left(h + \frac{w^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$$

scambio totale (quantità entrante meno quantità uscente) di metalpia

$$\left(h + \frac{w^2}{2} + gz\right)$$

della massa elementare;

. "
A
$-\int q\cdot n dA$ scambio termico totale di calore (entrante meno uscente);

.
V
$\int q dV$ generazione interna di calore, con q potenza termica generata per unit di volume;

· L Potenza meccanica totale scambiata (somma del lavoro positivo e del lavoro resistivo);

.
V
$e\rho\, dv$
τ
∂
∂ ∫ accumulo di energia nel sistema con e energia specifica dell'unitpar di massa del sistema.

Se ci si riferisce alle condizioni di regime permanente possiamo scrivere:

2
"
2 *A A V*
w
h gz ρ*V ndA q ndA qdV L*
− + + · − · + =
∫ ∫ ∫
[97]

Possiamo ancora applicare il teorema della divergenza ma lo sviluppo risulta piuttosto lungo poichpar occorre tenere conto del lavoro fatto da tutte le forze agenti sull'elemento di volume, fra le quali le tensioni normali σ e tangenziali τ.

La forma finale dell'equazione dell'energia, riferita all'entalpia, :

h h h T T p p p
u v u w q
x y x x y y x y
ρ ρ ρ λ λ μ
τ τ
∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ + + = + + + + + Φ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂

ove si ha:

2 2 2 2 2
2
3
u v u v u v
y dx x y x y
μ μ
∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ Φ = + + + − + ∂ ∂
∂ ∂ ∂

detto termine dissipativo. In forma simbolica la precedente equazione dell’entalpia si può scrivere:

$$\rho \frac{Dh}{D\tau} = \nabla\cdot\left(\lambda \nabla T\right) + \dot{q} + \frac{Dp}{D\tau} + \mu\Phi \qquad [98]$$

Ricordiamo ora che vale la relazione (vedi Termodinamica Applicata):

$$dh = c_p\, dT + \left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] dp$$

che può ancora essere scritta facendo apparire la densità $\rho=1/v$:

$$dh = c_p\, dT + \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right] dp$$

E, infine, tenendo conto della definizione del fattore di dilatazione termica:

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

si ha:

$$dh = c_p\, dT + \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta T\right) dp$$

per cui la [98] si può scrivere nella forma:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \nabla\cdot\left(\lambda \nabla T\right) + \dot{q} + \beta T \frac{Dp}{D\tau} + \mu\Phi$$

Nel caso di fluidi a comportamento incomprimibile e nel caso che $\frac{Dp}{D\tau}$

$D\tau$ sia trascurabile la precedente equazione si può scrivere, in forma semplificata:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \nabla\cdot(\lambda \nabla T) + \mu\Phi + \dot{q}$$

Se il mezzo è omogeneo ed isotropo (λ = costante) allora si può ancora scrivere:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \lambda \nabla^2 T + \mu\Phi + \dot{q}$$

Nel caso in cui il termine dissipativo sia trascurabile[15] e non ci sia generazione interna di calore □:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \lambda \nabla^2 T$$

Le ultime due equazioni dell'energia sono molto utilizzate per lo studio della convezione termica.

5.4.3 EQUAZIONE DELL'ENTROPIA PER SISTEMI APERTI

L'equazione di Clausius per i sistemi chiusi vista nel corso di Termodinamica Applicata □:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\mathrm{Reale}} + \delta S_{irreversibile}$$

Per un sistema aperto in forma integrale questa diviene:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_V \rho s\, dV + \int_A \rho s \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA - \int_A \frac{1}{T}\frac{dQ}{d\tau} = \int_V \rho s_{irr}\, dV$$

Questa equazione risulta utile nella pratica quando si vuole ottimizzare l’efficienza dei sistemi
termodinamici nel senso di determinare le condizioni di minore produzione di entropia. Una
applicazione tipica si ha nell’ottimizzazione progettuale degli scambiatori di calore.

5.4.4 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

La legge di conservazione della quantità di moto, di Newton, in forma finita è data da:

V
$e\ u$
M
$F\ M\ M$
τ
$+ - = \partial$
∂

⅃ ⅃

Per derivare la forma differenziale occorre considerare, fra le forze in gioco, anche le tensioni
normali σ e tangenziali τ che agiscono sull’elemento di volume oltre alle forze di volume (ad esempio il
peso, le forze elettromagnetiche, ..) X, Y, Z.

Poiché la precedente equazione è vettoriale occorre effettuare il bilancio nelle direzioni di moto

Ad esempio per la direzioni x si ha l’equazione:

$( )\ ( )\ _{xx\ yx}\ p\ u\ v\ u$
X
$x\ x\ y\ x\ y$
$+ \partial\sigma - \partial + \partial\tau = \partial\ \rho + \partial\ \rho$
$\partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial$

che può essere semplificata per l’equazione di continuità [95] nella forma:

$( )\ _{yx}$
$_{xx}$
$u\ u\ u\ u$
$X\ p\ u\ v\ w$
$x\ y\ x\ y\ z$
τ
$\sigma\ \rho$
τ
$+ \partial - + \partial = \partial + \partial + \partial + \partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial$

15 Per velocità piccole rispetto a quelle del suono nel mezzo a pari condizioni $\mu\ \phi$ si dimostra trascurabile.

Analogamente per la direzione y si ha:

$( )\ _{xy}$
$_{yy}$
$v\ v\ v\ v$
$Y\ p\ u\ v\ w$
$x\ x\ x\ y\ z$

τ
σ ρ
τ
+ ∂ − + ∂ = ∂ + ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂
e per l’asse z si ha:
( ) zx
zz
w w w w
Z p u v w
z z x y z
σ τ ρ
τ
+ ∂ − + ∂ = ∂ + ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ∂
Per eliminare gli sforzi σ e τ dalle precedenti equazioni si ricorda che per i fluidi newtoniani gli
sforzi sono proporzionali ai gradienti di velocità (legge di Newton) con costante di proporzionalità pari
alla viscosità dinamica.
Lo sviluppo (sostituzione degli sforzi con relazioni funzioni dei gradienti di velocità) porta alle
equazioni di Navier – Stokes :
2
2
3 xx
u u v w
x x y z
σ μ μ
= ∂ − ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂
2
2
3 yy
v u v w
y x y z
σ μ μ
= ∂ − ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂
2
2
3 zz
w u v w
z x y z
σ μ μ
= ∂ − ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂ ∂
xy yx yz zx
u v w
y z x
τ τ τ τ μ
= = = = ∂ + ∂ + ∂ ∂ ∂ ∂
Sostituendo queste equazioni nelle precedenti equazioni di conservazione della quantità di moto
si ottiene l’equazione vettoriale simbolica:
DV 2

$$\rho \frac{DV}{D\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + F$$

[99]

Questa equazione descrive in modo completo i fenomeni meccanici dovuti al moto delle particelle di fluido ed è fondamentale per lo studio della convezione termica.

5.5 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

E' noto che il moto di un fluido sopra una superficie porta alla formazione dello strato limite, vedi Figura 44, all'interno del quale la velocità del fluido risente della presenza della parete per effetto delle forze viscose.

Si ricordi che si definisce strato limite dinamico lo spazio nel quale si ha una variazione di velocità par fini al 99% di quella indisturbata, al di fuori dello stesso strato limite.

Per effetto dei fenomeni di aderenza si possono fare alcune ipotesi semplificative per le equazioni di bilancio viste in precedenza.

In particolare si può assumere che siano valide le assunzioni che:

- La velocità longitudinale u sia molto maggiore delle altre due componenti v e w;
- Che il gradiente di velocità $\frac{\partial u}{\partial y}$ sia molto maggiore di tutti gli altri gradienti delle altre componenti di velocità par rispetto a qualunque asse;
- Che il gradiente di temperatura $\frac{\partial T}{\partial y}$ sia molto maggiore di tutti gli altri gradienti di temperatura $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $\frac{\partial T}{\partial z}$.

In queste ipotesi le equazioni di Navier – Stokes portano ad avere componenti di sforzi normali σ nulli in tutte le direzione mentre gli sforzi tangenziali non nulli sono:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$= = \partial \partial$

Substrato Laminare
Strato Turbolento
Strato Laminare
Inizio Moto turbolento
x
Profilo di velocita'
laminare
profilo di velocita'
turbolento
Vortici

Figura 44: Profili di velocità nello strato limite sopra una lastra piana

Inoltre se il fluido si suppone incomprimibile la sua densità, ρ, non varia e pertanto l’equazione di continuità diviene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

L’equazione della quantità di moto nella direzione x diviene:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

mentre la proiezione sull’asse y porta ad avere:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Infine l’equazione dell’energia, con il termine dissipativo μΦ, nello strato limite si semplifica nella forma seguente:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Queste ultime tre equazioni (nel piano) rappresentano le cosiddette equazioni dello strato limite che descrivono compiutamente tutta la fenomenologia (meccanica e termica) della convezione termica.

L’integrazione di queste equazioni non è affatto semplice e rappresenta uno dei problemi piùpar complessi di tutta la Scienza e la Tecnica. Queste equazioni descrivono fenomeni complessi i più vari, dalla meteorologia terrestre, alle correnti marine, agli scambi convettivi di tutti i corpi, …

Si osservi come le equazioni di continuità e di quantità di moto consentano di risolvere il campo di moto (u e v) mentre l’equazione della temperatura fornisce il campo termico, T.
La risoluzione delle prime due equazioni può essere considerata indipendente dalla terza fino a quando non si abbia parametri (ρ e μ) dipendenti dalla temperatura.

Ciò non sempre si verifica e in particolare con la convezione naturale si ha proprio questa dipendenza (ipotesi di Bussinesque) e pertanto le tre equazioni risultano accoppiate e non possono essere risolte separatamente, con aggravio notevole dei calcoli.
Pertanto possiamo considerare disaccoppiati le equazioni meccaniche da quella dell’energia solo per la convezione forzata mentre per quella naturale questa separazione non è più possibile.

5.5.1 IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE TERMICA

Scriviamo qui di seguito le equazioni dello strato limite:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

A)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Si può immediatamente osservare che in esse non compare il coefficiente di convezione termica h. Come mai? In effetti queste equazioni descrivono i fenomeni fondamentali che costituiscono il fenomeno complesso della convezione termica: il fluido si riscalda, si sposta e trasporta con sé l’energia interna (fenomeno di trasporto). Se vogliamo determinare h occorre considerare che l’equazione di Newton è par una semplificazione macroscopica della complessità dei fenomeni suddetti. Newton pose in relazione la temperatura della parete e quella del fluido indisturbato mediante la nota equazione:

$$q'' = h\left(T_p - T_f\right)$$

Va ancora considerato che la parete trasmette il flusso:

$$q'' = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Deve allora essere:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = h\left(T_p - T_f\right)$$

e pertanto risulta:

$$h = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{T_p - T_f} \qquad [100]$$

Quindi se si conosce il gradiente di temperatura nel fluido all’attacco della parete (per y=0) allora
è possibile calcolare il coefficiente h. Pertanto la risoluzione delle equazioni dello strato limite e in
particolare del campo di temperatura (per altro dipendente da quello di velocità) porta al calcolo di h mediante
la relazione precedente.

5.5.2 I PARAMETRI DI SIMILITUDINE

Se si trascura l’effetto del gradiente di pressione nell’equazione della quantità di moto e del
termine dissipativo nell’equazione dell’energia allora le equazioni dello strato limite divengono:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

B)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Appare evidente l'identità formale delle ultime due equazioni che hanno a primo membro il termine convettivo $u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$ relativo, rispettivamente, alla velocità in direzione del moto, u, e alla temperatura e a secondo membro il termine di attrito o di flusso di conduzione entrambi con analoga forma matematica[16].

Si osserva ancora che il gradiente di pressione dipende dalla geometria di scambio e non dalle caratteristiche dello scambio convettivo. Ad esempio, per il moto all'interno di condotti circolari $\frac{\partial p}{\partial x}$ è dato dalla relazione di Weissbach $\frac{\partial p}{\partial x}=\xi\frac{1}{2}\rho\frac{u^2}{d}$. Pertanto quanto detto sul formalismo matematico può ancora ritenersi valido in presenza del gradiente di pressione.

Il termine dissipativo, invece, dipende dal campo di velocità e pertanto la sua presenza costituisce una differenza formale non trascurabile. Sorge spontanea la domanda se sia possibile modificare queste equazioni per renderle adimensionali. Ponendo:

$$x^*=\frac{x}{L};\quad y^*=\frac{y}{L}$$

$$u^*=\frac{u}{\ldots};\quad v^*=\frac{v}{\ldots}$$

u∞ u∞
= =
*
p
T T
T
T T
∞
∞
= −
−
2 *
p
p
ρ u∞
=
allora le equazioni dello strato limite, A), inizialmente scritte divengono:
* *
0
* *
u v
x y
∂ + ∂ =
∂ ∂
2
2
* * 1 *
* * *
* * * Re *
u u p u
u v
x y x y
∂ + ∂ = − ∂ + ∂
∂ ∂ ∂ ∂
2
2
* * 1 *
* *
* * Re Pr *
T T T
u v
x x y
∂ + ∂ = ∂
∂ ∂ · ∂
con i numeri adimensionali di Reynolds e di Prandtl definiti, come noto, da:
Re
ρ wL wL
μ ν
= =
Pr p c
a
μ ν
λ
= =

[16] Proporzionalità, tramite a e ν alla derivata seconda della velocità e della temperatura.

Queste nuove equazioni sono ora adimensionali e consentono di risolvere il campo di velocità par adimensionale, u* e v*, e di temperatura, T*.
In genere si hanno funzioni del tipo:

$$u^* = u^*\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

$$v^* = v^*\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

E ancora per la temperatura adimensionale:

$$T^* = T^*\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

Si ricordi che $\frac{dp^*}{dx^*}$ dipende dalla geometria, come pure la lunghezza di riferimento L. Se si applica la relazione [100] per il calcolo di h allora si ha:

$$Nu_x = \frac{h_x L}{\lambda} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = f\left(x^*, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

Il valore medio di h_{x^*} dipende da:

$$\int_0^1 \ldots dx^* \; \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \ldots$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L}\int_0^L Nu\, dx = f\left(\frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

con Nu numero di Nusselt. Per data geometria e quindi per assegnato $\frac{dp^*}{dx^*}$ si ha il legame funzionale:

$$Nu = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right) \quad [101]$$

Questa relazione è molto importante perché ci indica un legame funzionale fra il numero di Nusselt (che contiene h) e i numeri adimensionali di Reynolds e di Prandtl. Il numero di Prandtl è anche dato dal rapporto fra la viscosità cinematica (detta anche diffusività meccanica) e la diffusività termica.

5.5.3 ANALISI ADIMESIONALE PER LA CONVEZIONE FORZATA

L'analisi adimensionale mediante l'applicazione del teorema di Buckingam[17] trova esattamente gli stessi risultati visti sopra con l'adimensionalizzazione delle equazioni dello strato limite. Non sfugge certamente il significato fisico del precedente sviluppo: partendo dalle equazioni costitutive della convezione termica (forzata) si è pervenuti alla definizione del legame funzionale fra le grandezze termofisiche in gioco presenti nei numeri adimensionali Nu, Re e Pr.

Ancora dalle equazioni di Navier - Stokes per lo strato limite per la convezione forzata si ha che la velocità del fluido è imposta esternamente mediante un circolatore del fluido e pertanto si osserva che il coefficiente di convezione h è funzione delle seguenti variabili:

$$h = h\left(\rho, \mu, w, l, c_p, \lambda\right) \quad [102]$$

Si possono scrivere le seguenti relazioni dimensionali:

$$\left[l\right] = \left[L\right]$$

[17] L'Analisi Adimensionale di Buckingam fornisce una semplice procedura matematica per semplificare il numero di variabili indipendenti nello studio di un problema complesso. Essa viene attuata indipendentemente dalla conoscenza del fenomeno fisico e, pur se semplice nella trattazione, fa perdere di vista il reale significato delle grandezze in gioco. Per il teorema di Buckingam (o teorema pi-greco) si dimostra che se una grandezza k dipende da m altre variabili e se è possibile scegliere n variabili indipendenti allora la variabile k si può porre in funzione di m-n gruppi adimensionali.

$$\left[w\right] = \left[LT^{-1}\right]$$

$$[\rho] = \left[ML^{-3}\right]$$

$$[\mu] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]$$

$$[\lambda] = \left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]$$

$$\left[c_p\right] = \left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]$$

$$[h] = \left[MT^{-3}\theta^{-1}\right]$$

Ipotizzando una relazione di tipo monomia[18] del tipo:

$$h = C\rho^a \mu^b w^c l^d c_p^e \lambda^f \quad [103]$$

si ottiene l'equazione di congruenza:

$$\left[MT^{-3}\theta^{-1}\right] = C\left[ML^{-3}\right]^a\left[ML^{-1}T^{-1}\right]^b\left[LT^{-1}\right]^c[L]^d\left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]^e\left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^f \quad [104]$$

da cui è possibile ricavare il sistema di congruenza dimensionale:

$$\begin{cases} 0 = -3a - b + c + d + 2e + f & \text{per } L \\ 1 = a + b + f & \text{per } M \\ -3 = -b - c - 2e - 3f & \text{per } T \\ -1 = -e - f & \text{per } \theta \end{cases} \quad [105]$$

Ancora procedendo come per la convezione naturale, risolto il sistema per 6-4=2 variabili arbitrarie scelte come indipendenti si ha che la [104] diviene:

$$\frac{hl}{\lambda} = C\left(\frac{\rho w l}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda}\right)^n \quad [106]$$

si perviene ad una relazione fra tre gruppi adimensionali e più precisamente fra i numeri di Nusselt, Prandtl e Reynolds, già introdotti in precedenza.

Il legame funzionale è del tipo:

$$Nu = C \cdot \mathrm{Re}^m \cdot \mathrm{Pr}^n \quad [107]$$

o più in generale della forma

$$Nu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \quad [108]$$

Nel prosieguo sono fornite alcune tabelle utili per il calcolo dei coefficienti di convezione termica sia in regime forzato che naturale.

5.6 CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO

Le equazioni dello strato limite A) cos come sono scritte valgono per regimi laminari nei quali si possono individuare con precisione i percorsi e le velocit delle particelle di fluido in movimento. La cosa non risulta semplice nel caso di moto turbolento a causa della imprevedibile casualit del moto.

Ogni particella in un dato istante, infatti, pu spostarsi liberamente in ogni direzione ma il valore medio in un periodo temporale congruo deve avere una componente media della velocit non nulla solo nella direzione di moto e cio deve essere $u \neq 0$, $v = w = 0$.

Seguendo una metodologia di studio suggerita da Prandtl possibile scrivere, in ogni istante:

[18] In realt non necessario supporre che il legame funzionale sia monomio. Si dimostra che il procedimento resta valido anche per relazione di tipo polinomiale. Si preferito utilizzare la forma monomia per semplicit espositiva.

$u = u + u'$

$v = v + v'$

$w = w + w'$

$T = T + T'$

$p = p + p'$

avendo indicato con gli apici i valori fluttuanti e con il sopra segno i valori medi di ciascuna grandezza. Le equazioni dello strato limite A) con le precedenti sostituzioni possono essere risolte tenendo presente che, statisticamente, si hanno le seguenti eguaglianze:

( ) ( ) 2 2 2

' 0

0 ; 0 ; 0

' 0

' '

'

u

u u u

x

u v u v

uu

uv uv u v

u u u

τ τ

=

 ∂ ∂ ∂   = =   = ∂ ∂ ∂

+ = +

=

= +

= +

e pertanto divengono:

0
u v
x y
∂ + ∂ =
∂ ∂
1
' '
u u p u
u v u v
x y x y y
ν
ρ
∂ + ∂ = − ∂ + ∂ □□ ∂ − □□ ∂ ∂ ∂ ∂ □ ∂ □
1
' ' ' '
p
T T T u
u v a v T u v
x y y y c y y
ν
∂ + ∂ = ∂ □□ ∂ − □□ + ∂ □□ ∂ − □□ ∂ ∂ ∂ □ ∂ □ ∂ □ ∂ □

Ponendo:
' ' M
u
u v
y
− =ε ∂
∂
con ε_M la diffusivit□ meccanica del vortice e ancora:
' ' H
T
v T
y
− =ε ∂
∂
con ε_H detta diffusivit□ termica del vortice si pu□ ancora scrivere:
0
u v
x y
∂ + ∂ =
∂ ∂
( ) 1
M
u u p u
u v
x y x y y
ν ε
ρ
∂ + ∂ = − ∂ + ∂ □□ + ∂ □□ ∂ ∂ ∂ ∂ □ ∂ □
C)

( ) ( ) 1
H M
p
T T T u
u v a
x y y y c y y
ε ν ε
∂ + ∂ = ∂ □□ + ∂ □□ + ∂ □□ + ∂ □□ ∂ ∂ ∂ □ ∂ □ ∂ □ ∂ □

che sono le nuove equazioni dello strato limite per il regime turbolento. Come si pu□ osservare
adesso le incognite sono passate da tre (u,v,T) a cinque (u,v,T, ε_M, ε_H) pur avendo sempre tre equazioni a
disposizione.
Ne segue che la soluzione del campo dinamico e termico non □ pi□ possibile con le sole
equazioni costitutive C) ma ad esse vanno aggiunte altre due equazioni che definiscono le diffusivit□ del
vortice meccanica, ε_M, e termica, ε_H. Queste equazioni sono di solito sperimentali, come si vedr□ nel
prosieguo con i profili universali di velocit□ e di temperatura.

5.6.1 NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA

Per oltre un secolo si □ associato alla parola turbolenza il significato di caotico nel senso classico di
indeterminazione ossia di incapacit□ a gestire in modo rigoroso fisico – matematico il problema.
Quando un problema si presenta in modo non direttamente risolvibile o quanto meno gestibile
con le conoscenze del momento allora l'Uomo cerca trovare sempre una via alternativa che consiste nel
definire un modello pi□ semplice che riduce la complessit□ del problema e che quindi porta ad avere
risultati utili anche se si □ perso il legame diretto fra causa ed effetto.
L'idea di Kutadelaze di definire le variabili turbolente come somma di un valore medio e di un
valore istantanemanete variabile (come fatto nel precedente paragrafo) □ certamente stata utile ad
affrontare e risolvere un problema che nell'ottocento non era risolvibile con le conoscenze dell'epoca.
Pur tuttavia questa procedura ha di fatto posto un velo all'intelligenza dei ricercatori di diverse
generazioni perch□ ha impedito loro, per una sorta di pigrizia mentale, di ricercare una soluzione che
avesse un legame diretto con il fenomeno complesso della turbolenza.
In pratica la metodologia di Kutadelaze non risponde alle domande pi□ dirette ed elementari che
un ricercatore si deve porre: perch□ avviene la transizione dal moto laminare al moto turbolento?
In effetti la Statistica ci insegna che il valore medio di una variabile nasconde tutta la statistica di
ordine superiore che essa pu□ presentare focalizzando l'attenzione solo sul

primo momento statistico, il valore medio. Le fluttuazioni non sono pi prese in considerazione e con esse la storia evolutiva del fenomeno legato alla variabile fluttuante.

Se osserviamo il pennacchio di fumo che si origina da una sigaretta accesa, ad esempio, possiamo notare che all’inizio (nel tratto pi vicino al focolare) si ha un andamento ordinato e laminare.

Successivamente, ad una certa distanza dal focolare, si comincia ad osservare una prima oscillazione (vedi Figura 45) di relativamente piccola ampiezza cui seguono altre oscillazioni di ampiezza crescente.

Figura 45: Pennacchio originato da un focolare in basso

Quando queste oscillazioni superano determinati valori che dipendono dalle condizioni evolutive (tipo di fluido, temperatura del focolare, distanza, ….) allora si ha l’inizio della formazione di veri vortici caratteristici del moto turbolento.

Se consideriamo un segmento di pennacchio e consideriamo le forze agenti ai suoi estremi allora lo possiamo schematizzare come un’asta soggetta ai carichi di punta. E’ noto che questa condizione di carico porta all’instabilit e quindi alla flessione quando la rigidezza flessionale (EI) dell’asta inferiore ad un valore limite caratteristico per la geometria, i vincoli e i carichi.

La stessa cosa possiamo pensare per il segmento di pennacchio: quando, allontanandosi dal focolare, viene sottoposto a forze esterne alle quali non pu resistere ecco che esso si flette e da quel momento iniziano le oscillazioni che sfociano nella turbolenza.

Le considerazioni appena accennate sono oggi sviluppate dai vari ricercatori ottenendo eccellenti risultati e un grande avanzamento della conoscenza nelle problematiche della turbolenza che comincia a non apparire pi come un moto caotico e quindi non descrivibile in modo esatto ma come un evento perfettamente deterministico che possibile studiare con le metodologie solite).

Ancora una volta la banalizzazione della realt e il velo mentale che da questa ne deriva ha portato per oltre un secolo a ritenere risolto un problema che invece ancora tutto da studiare e risolvere. Il modello semplificato di Kutadelaze da ritenere solo un semplice surrogato della realt, un modello comunque distante anche se ci ha consentito di pervenire a risultati importanti nella ricerca.

C’ da fare un confronto metodologico con quanto si verificato per il coefficiente di convezione: Newton super la complessit del fenomeno definendo, in modo puramente apodittico, h come rapporto fra flusso termico specifico e differenza di temperatura e così siamo andati avanti per secoli. Allo stesso modo Kutadelaze semplificò il problema della turbolenza con le equazioni dei valori medi. Entrambe le posizioni si scostavano molto dalle equazioni costitutive del fenomeno ma, dobbiamo riconoscerlo, non era possibile fare altrimenti nei momenti storici in cui tali problemi sono stati posti ed affrontati.

Oggi siamo in grado di risolvere le equazioni costitutive di Navier Stokes mediante l'utilizzo di potenti computer e sofisticati programmi di calcolo (alias mediante algoritmi di calcolo opportuni) senza i quali poco potremmo fare. Lo stesso dicasi per lo studio della turbolenza.

5.6.2 LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTA

Con riferimento alla Figura 47 si immagini una particella di fluido alla distanza y dalla parete in moto turbolento all'interno dello strato limite dinamico. La velocità media longitudinale è pari a $u(x,y)$ mentre quella trasversale è nulla. Se questa particella passa nello strato (y – l), con l lunghezza media statistica di scambio fra gli strati di fluido, allora la velocità media diviene $u(x, y-l)$. Questa distanza è detta lunghezza di mescolamento e definisce il percorso all'interno del quale la particella di fluido mantiene ancora la sua identità. La fluttuazione u' provocata da questa migrazione nel livello (y – l) è par dello stesso ordine di grandezza e può essere scritta nella forma:

$$u' \sim u(x,y) - u(x,y-l) \sim l\frac{\partial u}{\partial y}$$

Allo stesso modo si può pensare che la fluttuazione v' sia dello stesso ordine di grandezza e che ancora si possa scrivere:

$$v' \sim l\frac{\partial u}{\partial y}$$

Allora la diffusività meccanica del vortice, ε_M, può essere posta proporzionale a:

$$\varepsilon_M \sim l^2\frac{\partial u}{\partial y}$$

Misure sperimentali suggeriscono che la lunghezza di mescolamento è proporzionale alla distanza dalla parete e cioè che sia:

$$l = \kappa y$$

con κ=0.4 determinato sperimentalmente da von Karman. Pertanto sostituendo nella precedente relazione si ha:

$$\varepsilon_M = \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

che è l'equazione classica della rappresentazione della diffusività meccanica del vortice e che è stata utilizzata dai vari ricercatori per risolvere il problema della chiusura delle equazioni dello strato limite.

5.6.3 LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTA

Quando le particelle si spostano da un piano ad un altro (quindi con variazione di v') trasportano anche la loro entalpia.

u
u + du
v
v + dv
Parete
Curva della strato limite
Particella 1
Particella 2
T
T]dT
L
dT
Profilo di
Temperatura
x

Figura 46: Lunghezza di mescolamento termica

Con riferimento alla Figura 46 si può osservare che le fluttuazioni generate dal mescolamento turbolento dipendono dalla lunghezza media di mescolamento, l, e che si può scrivere:

$$T' \equiv T\left(y - \frac{l}{2}\right) - T\left(y + \frac{l}{2}\right) \approx -l \frac{\partial T}{\partial y}$$

Il trasporto di entalpia corrispondente è dato da:

$$q'' = \rho c_p v' \left(T + T'\right)$$

Il valore medio temporale di questo flusso (turbolento) vale:

$$\left(q''\right)_y = \rho c_p \overline{v' T'}$$

In pratica il fluido a coordinate y inferiori cedono calore al fluido a coordinate y maggiori e pertanto nasce un flusso termico apparente dovuto agli effetti di mescolamento per la turbolenza. Tenendo conto dell’espressione di T’ trovata in precedenza si ha:

$$q''_y = \rho c_p \overline{v'T'} \approx -\rho c_p l v' \frac{\partial T}{\partial y}$$

Ponendo:

$$a_t = l v'$$

detta diffusività termica turbolenta, si può ancora scrivere per il flusso turbolento:

$$q''_y = \rho c_p \overline{v'T'} \approx -\rho c_p l v' \frac{\partial T}{\partial y} = -\rho c_p a_t \frac{\partial T}{\partial y}$$

In definita il flusso termico totale (conduttivo più turbolento) è pari a:

$$q''_y = -\rho c_p (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial y}$$

come visto per l’equazione dell’energia in moto turbolento. E’ opportuno osservare che la diffusività termica del vortice non è una proprietà termofisica del fluido, come è invece la diffusivitàpar molecolare a, ma dipende dal campo di moto, come la viscosità dinamica turbolenta.

Per l’analogia del meccanismo di turbolenza sopra descritto e cioè per l’equivalenza del meccanismo di trasporto della quantità di moto e dell’entalpia, si può supporre (ma non sempre è così) che sia:

$$\Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t} \approx 1$$

Questa ipotesi semplificativa è spesso assunta da diversi ricercatori come base di partenza per le loro teorie.

5.7 PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ

Se si considera il moto di un fluido sopra una lastra piana si osserva che la distribuzione della velocità, a partire dalla parete, varia secondo un profilo tipico indicato in Figura 44.

Si può subito osservare che il fluido per aderenza molecolare ha velocità nulla in corrispondenza della parete e che questa velocità va sempre più crescendo fino a raggiungere la velocità che il fluido aveva all'imbocco della lastra piana.
La distribuzione della velocità all'interno dello strato limite è di grande importanza ai fini del calcolo del fattore di attrito e dei coefficienti di scambio termico.
Nel caso di moto laminare il profilo di velocità può essere determinato integrando le equazioni di Navier Stokes all'interno dello strato limite dinamico e pervenendo ad un profilo di tipo parabolico o assimilabile ad esso.
Ben diverse, come si è visto nel paragrafo precedente, sono le condizioni quando il moto diviene turbolento. In questo caso, infatti, la velocità istantanea di una particella può andare in qualunque direzione, in modo del tutto casuale.
In Figura 47 si vede come una particella ad ordinata y che si sposta nel piano ad ordinata y +dy scambia con la analoga che scenda nel piano y (per conservazione della massa) la quantità di moto:

$$\Delta p = dm\,(u'_2 - u'_1)$$

ed analogamente l'energia:

$$de = c_p\, dm\,(T'_2 - T'_1)$$

Ne deriva che la turbolenza fa nascere due effetti nuovi: un rallentamento degli strati veloci per effetto dell'assorbimento di quantità di moto degli strati più lenti ed uno scambio di entalpia fra particelle di strati a diverse temperature.
L'esigenza di risolvere le variabili u, v e T nonché ε_M e ε_H con tre sole equazioni di Navier Stokes: ha generato il cosiddetto problema della chiusura nel senso che, oltre alle equazioni suddette occorre conoscere altre relazioni, solitamente di tipo sperimentale, per la determinazione delle diffusivitàpar del vortice meccanica e termica.
Un metodo elegante e proficui per risolvere questo problema è quello dei cosiddetti profili universali di velocità e di temperatura che qui si richiama brevemente.

u
u + du
v
v + dv
Parete
Curva della strato limite
Particella 1
Particella 2
y
y + dy

Figura 47: Scambio di quantità di moto e di energia fra particelle in moto turbolento

Con riferimento alla Figura 44, si definiscono le seguenti grandezze:

$$y^+ = \frac{y v_*}{\nu}; \quad u^+ = \frac{u}{v_*}; \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}$$

ove τ_s è lo sforzo di attrito alla parete, y la distanza dalla parete, u la velocità del fluido a quella distanza e ν la viscosità cinematica. L'equazione della quantità di moto del sistema C) in vicinanza della parete, ove $u = 0$ e $v = 0$, portano ad avere, trascurando gli effetti del gradiente di pressione:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu + \varepsilon_M\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

ovvero, integrando una prima volta:

$$\left(\nu + \varepsilon_M\right)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_s}{\rho} = \text{costante}$$

Allora integrando nuovamente e tenendo conto delle posizioni sopra fatte si ha la relazione:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_M}{\nu}}$$

che è possibile integrare se si conosce il rapporto fra la diffusività del vortice, ε_M, e la viscosità par cinematica.

Si osservi che la variabile y^+ è una sorta di numero di Reynolds calcolato per la distanza y dalla parete con riferimento alla velocità v_* detta velocità di parete. La y^+ è detta anche numero di Reynolds di parete.

Van Driest ha trovato sperimentalmente la seguente relazione:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 + 4K^2 y^2\left(1 - e^{-\frac{y^+}{A}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ε
ν
+
+ −

= + −
con K=0.40 ed A=0.5 e pertanto l’integrazione fornisce i seguenti risultati
$y_+ < 5$ $u_+ = y_+$
$y_+ > 40$ $u_+ = 1/K \ln(y_+) + C$
e nell’intervallo 5÷ 40 si ha un andamento complesso rappresentato in Figura 48. Il vantaggio del
profilo universale di velocit quello di essere rappresentato in forma adimensionale e di valere anche per
moto all’interno di condotti chiusi.

Figura 48: Profilo universale di velocitpar Tramite questo profilo, calcolata la y_+ si calcola la u_+ e quindi la velocit vera u del fluido alla
distanza y dalla parete. Conoscere la distribuzione della velocit al variare della distanza dalla parete par particolarmente utile nel moto turbolento dove la casualit del movimento genera fenomeni di
diffusivit meccanica e termica fittizi, cio dovuti allo scambio di quantit di moto e di energia fra
particelle provenienti da strati diversi.

5.8 PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA

Se la lastra piana riscaldata uniformemente, vedi Figura 49, allora oltre al profilo di velocitpar dinamico si forma anche un profilo di temperatura. Lo strato limite termico pu avere sviluppo simile o
anche diverso da quello dinamico in funzione delle caratteristiche del fluido. Procedendo allo stesso
modo visto per il profilo di velocit si osserva che l’equazione dell’energia delle C) in prossimit della
parete fornisce:
0 ( ) H
T
a
y y
ε
= ∂ + ∂ ∂ ∂
che integrata una prima volta diviene:
( ) s
p
-q"
costante=
c H
T
a
y
ε
ρ
+ ∂ = ∂
che integrata ancora una volta, tenuto conto delle posizioni adimensionali fatte

in precedenza,
produce la relazione:

$$T_p - T = \frac{q''}{\rho c_p}\int_0^y \frac{dy}{a+\varepsilon_H}$$

ove q” è il flusso termico specifico applicato alla parete, ρ e c_p cono la densità e il calore specifico
del fluido, a e ε_H rispettivamente la diffusività termica molecolare e la diffusività termica turbolenta
generata dalla miscelazione delle particelle di fluido provenienti dai vari strati nello strato limite
turbolento.

Substrato Laminare
Strato Turbolento
Strato Laminare
Inizio Moto turbolento
x
Profilo di velocita'
laminare
profilo di velocita'
turbolento
Vortici
Profilo di temperatura
Strato limite dinamico
Strato limite termico
Tp
u Tf
u

Figura 49: Profili di velocità e di temperatura per moto su lastra piana riscaldata

La precedente relazione viene adimensionalizzata nella forma:

$$T^+ = \frac{(T_p - T)\rho c_p v^*}{q''_0} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr}+\frac{1}{Pr_t}\frac{\varepsilon_M}{\nu}}$$

+
∫
ove T_p la temperatura di parete, Pr il numero di Prandtl del fluido ($Pr = \nu/a$) e $Pr_t = \varepsilon_M/\varepsilon_H$ il
numero di Prandtl turbolento.
Figura 50: Profilo universale di temperatura
Nota la relazione di Van Driest per il rapporto ε_M/ν , la precedente relazione pu essere integrata
per vari valori di Pr ottenendo le curve di Figura 50 detta profilo universale di temperatura.
L'utilizzo di queste curve del tutto simile a quello del profilo universale di velocit e risulta
estremamente utile per conoscere i profili reali di temperature negli strati limiti termici in regime
turbolento.
In Figura 50 si pu osservare la dispersione sperimentale dei dati per il valore Pr = 5.

Analoghe dispersioni si hanno per altri numeri di Prandtl, in ottimo accordo con le curve teoriche
sopra determinate.
Quando si assume $Pr_t = 1$ e $Pr = 1$ allora si pu dimostrare che gli stati limite di velocit e di
temperatura coincidono.
Negli altri casi si ha una diversificazione sensibile che porta anche ad un allontanamento delle
ipotesi sopra descritte. Si hanno varie teorie che cercano di risolvere il problema della chiusura per i casi
pi comuni della tecnica e si rimanda ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti.

5.9 ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA

Come si sopra detto, molti ricercatori hanno cercato di risolvere il problema della chiusura delle
equazioni dello strato limite turbolento affrontando sperimentalmente la determinazione delle due
diffusivit del vortice. In Tabella 6 si ha una rassegna delle equazioni proposte, ivi compresa quella di
Van Driest vista in precedenza.

5.9.1 ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA

Le equazioni dello strato limite A) o B) consentono di ottenere molte informazioni con semplici
considerazioni degli ordini di grandezza.
Tabella 6: Altre soluzioni del problema della chiusura
Ad esempio possiamo facilmente vedere che lo spessore dello strato limite, δ, proporzionale
alla distanza x dal bordo di attacco ed inversamente proporzionale al numero di Reynolds
corrispondente. Sostituendo ai valori indicati dalle equazioni differenziali le grandezze massime
corrispondenti, cio sostituendo u con u_∞ e x con δ allora l'equazione di

continuità fornisce:

$u\ v$

$x\ \delta$

$\infty \approx$

e l’equazione della quantità di moto:

2

$u\ u$

$u\ v$

$x\ \delta$

$\infty\ \infty$

$\infty \approx$

che, per la precedente relazione, porta ad avere:

$1/2$

vx

u

δ

∞

$\approx$

ovvero:

Re_x

$x\ \delta \approx$

avendo indicato con Re_x

$u\ x$

$= \infty\ \nu$. Con lo stesso procedimento si può dimostrare che il fattore di attrito dipende dall’energia cinetica specifica e dal numero di Reynolds. Infatti possiamo scrivere, per l’equazione di Newton:

$1/2$

$2\ 2\ 12$

0

$_s\ \mathrm{Re}\ _x$

y

$u\ u\ u\ x$

$u\ u$

y

$\tau\ \mu\ \mu\ \rho\ \rho$

$\delta\ \nu$

$-$

$\infty\ \infty\ -$

$\infty\ \infty$

$=$

$\partial\ = \approx \approx \approx \partial$

Questo risultato è confermato anche dall’analisi adimensionale e dai dati sperimentali. Il fattore di
attrito di parete, C_{fx}, può essere facilmente calcolato in base ai risultati sopra trovati. Risulta, infatti:

2

2

s

$_{fx}\ C$

u

τ

$\rho\ \infty$

$=$

e pertanto, combinando i risultati precedenti:

$$C_{fx} \approx \mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

5.10 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE

Consideriamo le equazioni dello strato limite nella forma B). La soluzione analitica esatta non par affatto agevole da trovare. Blasius ha proposto una soluzione, all'inizio del 1900, basata sul metodo della similitudine[19].

Se si osserva la Figura 51, infatti, si pu dedurre che i profili di velocit a distanze variabili dall'imbocco siano fra loro simili. Si pone allora, ricordando quanto sopra trovato per lo spessore dello strato limite δ, la variabile di similitudine nella forma:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

La soluzione contemporanea delle equazioni di continuit e della quantit di moto non agevole e pertanto si cerca di ridurre le due equazioni differenziali ad una sostituendo le variabili u e v con:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; ; \; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La funzione ψ detta funzione della traiettoria[20] e la posizione precedente verifica immediatamente l'equazione di continuit essendo:

[19] Gli anglosassoni indicano questo metodo con il termine similarity.

[20] Ovvero streamfunction.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

x
x
δ
δ

Figura 51: Similitudine dei profili di velocitpar L'equazione di continuit fornisce:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e sostituendo le precedenti relazioni:

2 2 3

$y\ y\ x\ x\ y^2\ y^3$
$\partial\psi\ \partial\psi - \partial\psi\ \partial\psi = \nu\ \partial\psi$
$\partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial\ \partial$
Le condizioni al contorno sono ora le seguenti:
0 per y=0
y
$\partial\psi =$
∂
$\psi = 0$ per y=0
u per y
y
ψ
∞
$\partial \to \to \infty$
∂
Ponendo ora:
$(\ )\ (\ )\ (\ )\ {}^{1/2}\ \psi\ x, y\ u\ \nu\ x\ f\ \eta\ {}_{\infty} =$
con f(η) funzione incognita allora l’equazione differenziale precedente diviene:
$2f''' + ff'' = 0$ [109]
ove si hanno le nuove condizioni al contorno:
$f' = f = 0$ *per* $\eta = 0$
$f' \to 1$ *per* $\eta \to \infty$
L’equazione [109] ora nella sola variabile f e pu essere risolta con sviluppi in serie ottenendo i
valori della seguente Tabella 7. Si osservi che vale la relazione:
df
$u\ u$
$d\eta\ {}_{\infty} =$
e quindi che il rapporto:

$u\ df$
$u\ d\eta\ {}_{\infty}$
$=$
deve variare da 0 a 0.99 per la stessa definizione di strato limite.
Tabella 7: Soluzione dell’equazione di Blasius
Dalla Tabella 7 si ricava che per df
$d\eta$ =0.99 si ha η=0.419.
Pertanto lo spessore dello strato limite vale:
4.92
Re_x
$x\ \delta =$
Inoltre, sempre dalla stessa Tabella 7 si ricava:
2
2
0
0.332
$d\ f$
$d\ {}_{\eta}\ \eta\ =$

 =

pertanto si pu calcolare il coefficiente di attrito, C_{fx}, dato da:

$$C_{fx} = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\rho \frac{u_\infty^2}{2}} = 2 \, Re_x^{-1/2} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = 0.664 \, Re_x^{-1/2}$$

Il valore medio del coefficiente di attrito per la lunghezza L della lastra vale:

$$\overline{C}_{fx} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} \, dx = 2 C_{fx} = 1.328 \, Re_L^{-1/2}$$

5.11 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO

Si pu procedere allo stesso modo di quanto fatto nel paragrafo precedente per determinare
l'andamento dello strato limite termico e calcolare il coefficiente di convezione termica.

L'equazione dell'energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

pu essere riscritta in funzione della nuova variabile:

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$$

ed assumendo che, per la stessa similitudine del profilo dello strato limite termico, sia:

$\theta = \theta(\eta)$

con η variabile di similitudine sopra indicata. La sostituzione porta ad avere la nuova equazione differenziale:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \qquad [110]$$

ove Pr è il numero di Prandtl del fluido. Le nuove condizioni al contorno sono:

$$\theta(0) = 0 \; ; \; \theta(\infty) = 1$$

Nel caso che sia Pr=1 la precedente equazione differenziale è formalmente identica a quella derivata dall'equazione della quantità di moto ove si sostituisca $\theta = \frac{df}{d\eta}$ e quindi con riferimento alla Tabella 7 si ha, per $\eta=0$:

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0.332\,Pr^{1/3}$$

Infine il coefficiente di convezione termica è dato da:

$$h = \frac{q''_p}{T_p - T_\infty} = \lambda \frac{T_\infty - T_p}{T_p - T_\infty} \left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_0 \cdot \frac{\sqrt{Re_x}}{x}$$

e quindi:

$$h_x = 0.332\,\lambda\,Pr^{1/3}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

$= \infty \cdot \cdot$

ovvero anche:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Il valore medio del coefficiente di scambio termico per la lunghezza L della lastra è dato da:

$$h_L = \frac{1}{L}\int_0^L h_x \, dx = 0.332 \, Pr^{1/3} \frac{\lambda}{L} \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{1/2} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} = 2 \cdot 0.332 \, Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \frac{\lambda}{L} = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \frac{\lambda}{L}$$

5.11.1 ANALOGIA DI COLBURN

Confrontiamo i numeri locali di h_x e C_{fx} allora si può scrivere:

$$\frac{C_{fx}}{2} = 0.332 Re_x^{-1/2}$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Combinando le due relazioni e definendo:

$$St = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr}$$

allora si ha:

$$St_x = 0.332 Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3}$$

ossia:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

che è la correlazione di Colburn. Essa assume grande importanza nella pratica perché lega il numero di Nusselt (nel quale è presente h) con il coefficiente di attrito, C_{fx}, di più agevole determinazione sperimentale. Pertanto da una campagna di misure meccaniche del coefficiente di attrito si possono conoscere i valori del coefficiente di convezione.

5.11.2 LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO

Per l'applicazione delle relazioni sopra trovate occorre calcolare le proprietà termofisiche alla temperatura di film data dalla media aritmetica fra la temperatura di parete e quella del fluido indisturbato:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

5.12 SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA

Per una lastra piana si ha il passaggio dal moto laminare a quello turbolento quando il numero locale di Reynolds supera $5 \cdot 10^5$. Nasce così lo strato subliminare e poi lo strato turbolento totalmente sviluppato. Al di là di $4 \cdot 10^6$ si ha certamente il moto turbolento sviluppato. Lo spessore dello strato limite turbolento è dato dalla relazione:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{Re_x^{1/5}}$$

Il coefficiente di attrito vale:

$$C_{fx} = 0.0592 Re_x^{-1/5}$$

Il valore locale del numero di Nusselt vale:

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

valida per $0.6 < Pr < 60$. Il valore medio del coefficiente di convezione è dato dalla relazione:

$$h = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{lam}} h_{lam,x}\, dx + \int_{x_{lam}}^{L} h_{turb,x}\, dx \right)$$

Assumendo una transizione per $Re = 5 \cdot 10^5$ allora la precedente relazione porta ad avere:

$$Nu_L = \left(0.664 Re_{x,lam}^{1/2} + 0.037 \left(Re_L^{4/5} - Re_{x,lam}^{4/5} \right) \right) Pr^{1/3}$$

che si può ulteriormente ridurre a:

$$Nu_L = \left(0.037 Re_L^{4/5} - 871 \right) Pr^{1/3}$$

valida per $5 \cdot 10^5 < Re < 10^8$ e per $0.6 < Pr < 60$.

5.12.1 STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE

Nel caso in cui si consideri il deflusso di un fluido sopra superfici cilindriche, vedi Figura 52, allora occorre considerare una forte variabilità delle condizioni locali al variare dell'angolo θ.

Figura 52: Deflusso sopra superfici cilindriche

Il flusso si mantiene laminare fino a quando $Re < 2 \cdot 10^5$ dopo di che diviene turbolento. Inoltre per valori elevati di Re_D si ha il distacco della vena fluida per un angolo pari a circa 140°. La forza di trascinamento esercitata dal fluido sulla superficie apparente del condotto cilindrico è data dalla relazione:

$$F_D = C_D S \frac{\rho w^2}{2}$$

ove C_D è il fattore di drag dato dalla Figura 53. Il coefficiente di convezione locale varia con l'angolo θ secondo quanto rappresentato in Figura 54. Il valore medio sul contorno circolare è dato dalla relazione:

$$Nu_D = \left(0.4\, Re_D^{1/2} + 0.06\, Re_D^{2/3}\right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$$

valida per $10 < Re < 10^5$ e per $0.6 < Pr < 300$ e $0.25 < \frac{\mu_s}{\mu_\infty} < 5$.

Nel caso di banchi di tubi si utilizza la relazione:

$$Nu_D = C\, Re_D^m\, Pr^n \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s}\right)^{0.36}$$

con C, m ed n variabili a seconda della geometria e in particolare si ha:

Figura 53: Fattore di Drag

C=0.4 per tubi sfalsati e $Re_D < 2 \cdot 10^5$

M=0.6 " " " "

C=0.022 per tubi sfalsati e $Re_D > 2 \cdot 10^5$

M=0.84 " " " "

C=0.27 per tubi allineati e $Re_D < 2{\cdot}10^5$
M=0.63 “ “ “ “
C=0.021 per tubi allineati e $Re_D > 2{\cdot}10^5$
M=0.84 “ “ “ “
La caduta di pressione vale:

$$\Delta p = f N \rho \frac{u_{max}^2}{2} Z$$

con f e Z dati dagli abachi di Figura 55 e Figura 56.
Figura 54: Numero locale di Nusselt
Figura 55: f e Z per passo quadrato

Figura 56: f e Z per passo triangolare

5.13 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA

Nelle prossime figure sono raccolte alcune correlazioni (sia sperimentali che teoriche) derivate per la convezione forzata. Ciascuna di queste correlazioni ha un campo si validit che segnalato nell’ultima colonna delle tabelle.
Tabella 8: Correlazioni per convezione forzata

Si consiglia di controllare sempre questi campi prima di applicare qualunque correlazione proposta. Le tipologie prese in considerazioni sono numerose e consentono di risolvere numerosi problemi pratici. In ogni caso occorre sempre ricordare che l’obiettivo principale il numero di Nusselt, Nu, nel quale definito il coefficiente di convezione h cercato.
L’uso delle correlazioni adimensionali risulta molto comodo, anche se all’inizio un po’ forviante, perch in questo modo ci si svincola dal sistema di misura e dalle caratteristiche geometriche e topologiche dello scambio convettivo.
Tabella 9: Correlazioni per convezione forzata
Tabella 10: Correlazioni per convezione forzata

5.14 CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI

E’ di grande interesse lo studio della convezione termica all’interno di condotti circolari (o assimilabili). Si tratta, infatti, di un vasto campo di possibili applicazioni industriali al quale opportuno dedicare maggiore attenzione.
Con riferimento alla Figura 57 si pu osservare che lo strato limite dinamico cresce dall’imbocco fino al congiungimento sull’asse del condotto. La lunghezza corrispondente denominata lunghezza di imbocco e si dimostra che, per il regime laminare, vale la relazione:

$$_e\, 0.05\mathrm{Re}$$

D
x
D
=
STRATO LIMITE DINAMICO
r
x
y

Figura 57: Strato limite dinamico in un condotto circolare

Tabella 11: Correlazioni per convezione forzata

Ove x_e è la lunghezza di imbocco anzidetta e Re_D è il numero di Reynolds riferito al diametro del condotto. La velocità media del fluido può agevolmente essere calcolata mediante la relazione:

$$u_m = \frac{1}{\rho S}\int_S \rho\, u(x,r)\, dS = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(x,r)\, r\, dr$$

Nel caso di moto laminare il profilo di velocità nel regime sviluppato è di tipo parabolico e rimane costante lungo la direzione di moto.

Ciò significa che deve essere v=0 e $\partial u / \partial x = 0$. Per ricavare il profilo di velocità possiamo utilizzare l’equazione della quantità di moto delle A) riscritta in coordinate cilindriche:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

In base alle considerazioni che sono v=0 e $\partial u / \partial x = 0$ allora si ha:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

la quale, integrata, fornisce l’integrale generale:

$$u(r) = \left(\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Le costanti di integrazioni si calcolano con le condizioni al contorno:

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=0}=0 \; ; \; \left(u\right)_{r=R}=0$$

Ne segue:

$$u=-\frac{1}{4}\frac{R^2}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

che è l'equazione del profilo di velocità cercata. Per r=0 si ha la velocità massima:

$$u_{max}=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

Si osservi che il rapporto fra la velocità media e quella massima vale, per quanto trovato in precedenza:

$$\frac{u}{u_{max}}=2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Per la relazione di Darcy – Weissbach la caduta di pressione specifica vale:

$$-\frac{dp}{dx}=\xi\rho\frac{u^2}{2D}$$

pertanto, anche in base all'espressione della velocità media dianzi calcolata, possiamo calcolare il fattore di attrito:

$$\frac{dp}{dx}\frac{2D}{u^2}$$

ξ
ρ
□ □ −□ □
= □ □

e quindi:
64
Re_D
ξ =
Tabella 12: Correlazioni per convezione forzata
Anche lo strato limite termico si sviluppa all’interno del condotto con andamento simile a quello
delle velocit□. La lunghezza di imbocco termica, x_t, pu□ essere calcolata, nel caso di parete riscaldata (T
imposta) fin dall’inizio, con la relazione:
$_t$ 0.033Re Pr
$_D$
x
D
=

Nel caso di flusso imposto fin dall’inizio vale la relazione:
$_t$ 0.043Re Pr
$_D$
x
D
=
I coefficienti di convezione possono essere calcolati, nei due casi di q”= cost e di T=cost,
mediante le relazioni:
4,36 per " cost $_D Nu = q =$
e:
3.66 per T=cost $_D Nu =$
Nella regione di ingresso, con strato limite termico ancora non stabilizzato, si hanno le relazioni:
2 $_1$
Re Pr $_D$
x
Gz
R
= −
con Re Pr $_D Gz = D x$.
Una correlazione valida nel caso di contemporaneo sviluppo degli strati limiti dinamico e termico
□ la seguente (Sieder – Tate):
( )
0.14
1/3 1.86 $_m$
$_p$
Nu Gz
μ

μ
□ □
= □□ □□
□ □
valida per T0=cost, per 0.5 < Pr < 16700, 0.0044 < m
p
μ
μ
< 0.75 e per ( )
0.14
1/3 m
p
Gz
μ
μ
□ □
□□ □□
□ □
>2.

5.14.1 CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE

In questo caso si opera con le stesse relazioni viste per i condotti circolari ma con un diametro equivalente (ai fini della portata[21]) dato dalla relazione:

4 $passaggio$
eq
$bagnato$
S
D
C
·
=

ove con $S_{passaggio}$ si intende l’area di passaggio del fluido e con $C_{bagnato}$ il contorno bagnato.

E’ sempre bene applicare alla lettera questa definizione, specialmente in quei casi nei quali l’area di passaggio □ virtuale (cio□ formata da pi□ contorni) come, ad esempio, per il flusso all’esterno dei condotti negli scambiatori di calore, come illustrato in Figura 58.

In questo caso l’area di passaggio □ virtuale ed □ pari al prodotto dei passi longitudinale e trasversale diminuita di 4 quarti di area dei condotti circolari e il contorno bagnato □ pari a 4 quarti di circonferenza dei condotti:

2 / 4
eq
$L\ T\ D$
D
D
π
π
= · −

Allo stesso modo si calcola il diametro equivalente per una sezione rettangolare.

21 In alcuni casi (vedi reti tecnologiche per le quali si rimanda la volume 3□) si definisce un diametro equivalente a
parit□ di perdite di pressione. L’espressione ottenuta □ notevolmente diversa ed □ data da: ( )

( )
0,625
. 0,25 1,3 eq PP
a b
d
a b
.
=
+
.

L
T
D
AREA DI
PASSAGGIO

Figura 58: Calcolo del diametro equivalente per uno scambiatore di calore

In Figura 59 si hanno due casi: un condotto rettangolare con lati dello stesso ardine di grandezza
ed un condotto con una dimensione prevalente sull’altra.

B
A
B
A

Figura 59: Diametro equivalente per condotti rettangolari

Applicando la definizione di diametro equivalente si ha:

( )
( )
4
2 eq
B A
D
B A
.
=
+

Nel caso di sezione ristretta (a destra della Figura 59) allora essendo A << B si ottiene:

( )
( )
4 4( )
2
2 2 eq
B A BA
D A
B A B
.

= ≈ ≈
+
Quindi una sezione rettangolare ristretta ha un diametro equivalente pari alla somma delle dimensioni minori e ciò risulta penalizzante per le perdite di pressione secondo la relazione di Darcy Weissbach:

$$-\Delta p = \xi \frac{L}{D_{eq}} \rho \frac{w^2}{2}$$

Ai fini degli scambi termici, però, la presenza di spigoli acuti cambia le modalità operative e in particolare si osserva che il coefficiente di convezione si annulla in corrispondenza degli spigoli.
In Tabella 13 si hanno i numeri di Nusselt per varie configurazioni geometriche sia per temperatura imposta che per flusso imposto.

5.15 CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO

La transizione fra regime laminare e turbolento avviene, com'è noto dallo studio dei fluidi reali, quando il numero di Reynolds supera 2900 (meglio considerare 4000 nelle applicazioni pratiche).
La lunghezza di imbocco per lo sviluppo completo dello strato limite dinamico è data dalla relazione:

$$10 \le \frac{x_{e,t}}{D} \le 60$$

In genere si assume che la lunghezza di imbocco sia pari ad almeno 60 diametri del condotto.
Il coefficiente di attrito, C_f, è dato da:

( )
2
2
2
$* \; 2$
2
1
2
s
f
$m \; m \; m$
v
C
$u \; u \; u$
τ
$\rho \; +$
= = =

ove, si ricorsi dallo studio dei profili universali di velocità, si è posto:

$$v^* = \left(\frac{\tau_s}{\rho}\right)^{0.5}$$

$$u_m^+ = \frac{u_m}{v^*}$$

ed infine:

$$y^+ = \frac{y\,u_m}{\nu}$$

con u_m velocità media del fluido all'interno del condotto.

Tabella 13: Numeri di Nusselt per varie tipologie di condotti

Per il moto turbolento si assume valida la relazione:

$$u^+ = 2.5\ln\left(y^+\right) + 5$$

Al variare di y (distanza dalla parete) si può calcolare y^+ e quindi il valore medio di u_m^+ vale:

$$u_m^+ = 2.5\ln\left(\frac{R}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\right) + 1.75$$

Tenendo conto della definizione del coefficiente di attrito, C_f, si ha, dopo alcuni passaggi:

$$u_m^+ = 2.5\ln\left(\mathrm{Re}_D\sqrt{C_f}\right) - 0.85$$

Essendo $\xi = 4C_f$ allora dalla precedente relazione si ricava:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2.035\log\left(\mathrm{Re}\sqrt{\xi}\right) - 0.6$$

che è la relazione di Prandtl. Weissbach ha trovato una relazione comoda nelle applicazioni:

$$\xi = 0.184\cdot \mathrm{Re}^{-0.2}$$

valida per tubi lisci con 10000 < Re < 300000. Per condotti rugosi si hanno altre relazioni che tengono conto della scabrezza relativa.
Si ricordano quella di Colebrook (vedi volume sui fluidi reali):

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\xi}}\right)$$

con ε scabrezza assoluta.
Questa relazione è scomoda da utilizzare perché fornisce ξ in forma implicita e quindi occorre ricorre ad calcoli ricorsivi. Meglio usare la nuova correlazione di Haaland che, oltre ad essere esplicita, fornisce valori con errori entro l'1.5% rispetto alla correlazione di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -1.8 \log\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{\mathrm{Re}_D}\right]$$

5.15.1 CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO

Dalle equazioni dello strato limite per regime turbolento, C), in vicinanza della parete si ha (come già visto per la derivazione dei profili universali di velocità) dall'equazione della quantità di moto:

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \left(\nu + \varepsilon_M\right)\frac{\partial u}{\partial y}$$

e dall'equazione dell'energia:

$$\frac{-q''_s}{\rho c_p} = \left(a + \varepsilon_H\right)\frac{\partial T}{\partial y}$$

Quest'ultima può essere scritta nella forma:

$$-\frac{q''_s}{\rho c_p} = \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\varepsilon_M}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial y}$$

con $Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$. Nel caso in cui $Pr = Pr_t = 1$ allora le due relazioni sono formalmente eguali e quindi si può ritenere ancora valida la correlazione di Colburn ricavata per moto laminare:

$$St = \frac{C_{fx}}{2} Pr^{-2/3}$$

Con riferimento al fattore di attrito di Darcy, essendo $f = 4\ C_f$, si ha:

$$St = \frac{f_x}{8} Pr^{-2/3}$$

che, per la relazione di Weissbach, diviene:

$$St_x = 0.023 Re^{-0.2} Pr^{-2/3}$$

dalla quale si ricava il numero di Nusselt:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}$$

valida per tubi lisci con $0.7 < Pr < 150$, $Re > 10000$, $L/D > 60$. Per il moto turbolento nei condotti si hanno altre correlazioni sperimentali molto buone e in particolare quella di Dittus – Boelter:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{n}$$

con n pari a 0.4 nel caso di riscaldamento ($T_p > T_m$) ed n=0.3 per raffreddamento e con gli stessi limiti per Re e Pr della relazione precedente. Una correlazione molto usata è quella di Sieder Tate:

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0.14}$$

che tiene conto della variabilità della viscosità alla temperatura di parete e alla temperatura media del fluido. Valida è anche la relazione di Petukhov:

$$Nu = \frac{\frac{f}{8}\,\mathrm{Re\,Pr}}{1.07 + 12.7\sqrt{\frac{f}{8}}\left(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1\right)}\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^n$$

con n pari a 0.11 per riscaldamento uniforme a temperatura costante, 0.25 per raffreddamento uniforme a T costante ed pari a 0 per flusso termico imposto.

Nella zona di profilo di velocità non sviluppato si può usare la relazione di Nusselt:

$$Nu = 0.036\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{D}{L}\right)^{0.055}$$

valida per 10 < D/L < 400.

Per condotti a sezione non circolare si può applicare quanto detto per i diametri equivalenti ai fini del calcolo delle perdite di pressione ma occorre apportare correzioni per il calcolo del coefficiente di convezione che dipende fortemente dalle condizioni locali e della presenza degli spigoli.

5.16 SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI

I metalli liquidi sono caratterizzati da una elevata conducibilità termica e quindi da numeri di Prandtl ($Pr = c_p\mu/\lambda$) molto piccoli (<<1). Pertanto le correlazioni viste in precedenza non risultano più valide, come indicato anche dalle condizioni di interpolazione sempre riportate. I metalli liquidi, inoltre, sono in grado di trasmettere calore anche se non in movimento proprio per l'elevata conducibilità termica.

Ai fini del calcolo del coefficiente di convezione termica occorre modificare la forma matematica delle correlazioni utilizzate. In particolare si dimostra che le correlazioni di scambio sono della forma:

$$Nu = C_1 + C_2\left(\mathrm{Re\,Pr}\right)^n$$

e ponendo Pe = Re Pr (numero di Peclet) si ha anche la forma:

$$Nu = C_1 + C_2 Pe^n$$

Sabbotin suggerisce la correlazione:

$$Nu = 5 + 0.25 Pe^{0.8}$$

Per le leghe sodio – potassio (dette leghe NaK) si può usare la correlazione di Skupinski:

$$Nu = 4.82 + 0.0185 Pe^{0.827}$$

valida per Re < 900000, 100 < Pe < 10000 e L/D>60.

5.16.1 ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA

Quanto detto in precedenza sulla convezione forzata prospetta una metodologia di risoluzione che qui possiamo riassumere nei seguenti punti fondamentali.

Determinazione delle proprietà termofisiche

Le proprietà termofisiche del fluido dipendono dalla temperatura e pertanto sorge subito la difficoltà di doverle determinare per un campo di temperature che spesso ha gradienti elevati.

Di solito si determinano alla temperatura media fra quella di parete e quella del fluido fuori dallo strato limite termico, detta anche temperatura di film:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl

Il numero di Reynolds è determinato nota la velocità, u_∞ (in genere quella del fluido non disturbato) e il parametro geometrico (x o D) e la viscosità cinematica del fluido alla temperatura di film.

Il numero di Prandtl lo si calcola allo stesso modo o lo si ricava dai dati termofisici in forma tabellare o funzionale del fluido alla temperatura di film.

Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu

In precedenza si sono dimostrate numerose correlazioni fra Nu e Re e Pr. Nelle tabelle del §5.13 se ne elencano alcune decine.

La scelta della correlazione da utilizzare per calcolare Nu (e quindi il coefficiente di convezione termica) va fatta tenendo conto delle condizioni di validità indicate per ciascuna correlazione (cioè par intervalli possibili per Re e per Pr) e al tipo di regime di moto (laminare o turbolento) che è possibile conoscere noto Re.

Calcolo del flusso termico

Tramite la correlazione di scambio si trova Nu e quindi, noto il parametro geometrico di similitudine, L, e il coefficiente di conducibilità del fluido alla temperatura di film, λ, si determina h:

Nu

h

L

$= \cdot \lambda$

Pertanto, note le temperature di parete e di fluido indisturbato, si calcola il flusso termico:

$'' \left(\right) {}_p q \; h \; T \; T_\infty = -$

Calcolo degli sforzi di attrito

Si è visto nei paragrafi precedenti come calcolare C_{fx} o anche il valore medio globale per varie condizioni geometriche e di moto.

Noto questo coefficiente si può calcolare lo sforzo tangenziale, τ_s, o le perdite per attrito.

6 CONVEZIONE NATURALE

La convezione naturale presenta difficoltà aggiuntive nella risoluzione delle equazioni della strato limite rispetto alla convezione forzata. In questo caso, infatti, le equazioni della quantità di moto (che ora riscriveremo) e dell'energia risultano accoppiate poiché la temperatura compare anche nella prima equazione.

La convezione naturale si può definire la vera convezione nel senso che il moto del fluido (e quindi il trasporto di materia ed energia) è conseguente al campo di temperature che si stabilisce nel fluido stesso.

Senza differenze di temperature il fluido non si muove e quindi si annulla la convezione termica naturale. La forza di spostamento (driving force) è determinata dallo squilibrio causato dalla forza di gravità fra le masse riscaldate (più leggere) e quelle fredde (solitamente più pesanti). Pertanto la differenza di densità, generata dalla differenza di temperature, genera il moto convettivo.

Oltre al campo gravitazionale terrestre nelle applicazioni si utilizzano anche campi artificiali, come avviene, ad esempio, per il raffreddamento delle palette delle turbine per il quale si sfrutta il campo di forze centrifughe generato dalla rotazione dei rotori.

La convezione naturale genera campi di velocità solitamente meno intensi di quelli in convezione forzata dove tali campi sono imposti dall'esterno in modo del tutto indipendente dal campo di temperatura.

Anche se la convezione forzata produce scambi termici più intensi per i più elevati coefficienti di convezione, la convezione naturale è fondamentale nei processi naturali (climatologia terrestre, riscaldamento naturale dei corpi, impiantistica, ….) e deve sempre essere

presa in considerazione quale
unico metodo di scambio in condizioni di emergenza quando il fluido non viene mosso da organi
esterni.
Così, ad esempio, il radiatore di una autovettura funziona meglio quando la vettura è in
movimento e ad alte velocità deve sì scambiare con l'aria ambiente più calore ma ha anche migliori
condizioni di scambio termico.
Pertanto le condizioni più critiche si hanno a vettura ferma quando il flusso dell'aria di
raffreddamento è generato dalla sola convezione naturale. E' a quel punto che parte la ventola
supplementare di raffreddamento!
Un impianto termico (nucleare o convenzionale) ha le condizioni di criticità quando si fermano le
pompe di circolazione. Un circuito elettronico ha le condizioni peggiori quando si ferma (o manca,
come avviene nei portatili) la ventola di raffreddamento.
Equazione di continuitàpar L'equazione di continuità per la convezione naturale rimane invariata rispetto a quanto visto per
la convezione forzata:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Equazione della quantità di moto
Le equazioni della quantità di moto deve ora contenere la forza unitaria X corrispondente alla
forza di gravità. Proiettando sull'asse x l'equazione:

$$\rho\frac{DV}{D\tau}=-\nabla p+\mu\nabla^2 V+F$$

otteniamo, all'interno degli strati limiti:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho g$$

Pertanto il gradiente di pressione dipende solo dall'asse y.
Proiettando nell'asse y si ha:

$$u\ u\ p\ u \quad 2\ 2$$

u v
x y x y
ρ ∂ +ρ ∂ = − ∂ +μ ∂
∂ ∂ ∂ ∂
valida nel moto laminare. Introduciamo ora l’ipotesi di Bussinesque in base alla quale assumiamo
che le proprietà termofisiche del fluido siano costanti ad esclusione della densità funzione della
temperatura.
Tp u(y)
t (y)
δ δ
ρ
Figura 60: Convezione naturale con lastra piana verticale
Pertanto riteniamo costante μ ma non ρ. La distribuzione delle pressioni nel fluido è di tipo
idrostatico e quindi si può porre:
p dp
g
x dx
ρ∞
∂ = = −
∂
ove si indica con ρ∞ la densità del fluido non interessato dallo strato limite termico (quindi
lontano dalla parete). Pertanto sostituendo nella precedente equazione della quantità di moto si ha:
2
2
u u 1 *p u*
u v g
x y x y
ν
ρ
∂ + ∂ = − ∂ + ∂ −
∂ ∂ ∂ ∂
che diviene:
( )
2
2
u u u g
u v
x y y
ν ρ ρ
ρ ∞
∂ + ∂ = ∂ + −
∂ ∂ ∂
L’ultimo termine a secondo membro può ancora essere scritto, ricordando il coefficiente di
dilatazione isobaro β, nella forma:
( ) ( ) *g*
ρ ρ *g*β *T T*

ρ ∞ ∞ − = − −

Ne segue che l’equazione della quantit di moto diviene:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta\left(T-T_\infty\right)$$

che, come si osserva dall’ultimo termine a secondo membro, contiene un termine, $g\beta(T - T_\infty)$, che dipende dalla temperatura ed detto alleggerimento termico (o anche, thermal buoyancy).

Equazione dell’energia

Anche questa equazione resta invariata rispetto a quella trovata per lo strato limite laminare per la convezione forzata:

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Il termine dissipativo pu trascurarsi a maggior ragione poich il campo di velocit meno intenso e pertanto l’equazione diviene:

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

6.1 ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Seguendo un procedimento gi visto per la convezione forzata nel 5.5.2 cerchiamo di conoscere i parametri fondamentali per la convezione naturale adimensionalizzando le tre equazioni sopra scritte per lo strato limite laminare. Si pongano le seguenti variabili, indicando con u_0 una velocit di riferimento di comodo:

$$x^*=\frac{x}{L}\;;\quad y^*=\frac{y}{L}$$

= =
0 0
* ; *

u v
u v
u u
= =
*
p
T T
T
T T
∞
∞
= −
−
2
0
*
p
p
ρ u
=
allora le equazioni dello strato limite sopra scritte divengono:
* *
0
* *
u v
x y
∂ + ∂ =
∂ ∂
( ) 2
2 2
0
* * 1 *
* * *
* * Re *
p u u g T T LT u
u v
x y u y
β ∞ ∂ + ∂ = − + ∂
∂ ∂ ∂
2
2
* * 1 *
* *
* * Re Pr *
T T T
u v
x x y
∂ + ∂ = ∂
∂ ∂ · ∂
ove si ha $Re=u_0L/\nu$. Il gruppo adimensionale a secondo membro dell'equazione della quantit di
moto pu essere scritto nella forma:
( )
2 2
0

$$\frac{g\beta (T_p - T_\infty) L}{u^2} T^* = \frac{Gr}{Re^2} \cdot T^*$$

ove si è posto il nuovo gruppo adimensionale, detto di Grashoff:

$$Gr = \frac{g\beta (T_p - T_\infty) L^3}{\nu^2}$$

definiamo ora una velocità caratteristica del moto data dalla relazione:

$$u_C = \sqrt{g\beta L (T_p - T_\infty)}$$

allora il numero di Grashoff può essere scritto nella forma:

$$Gr = \left(\frac{u_C L}{\nu}\right)^2 = Re_C^2$$

che conferisce a Gr il significato di un quadrato di un numero di Reynolds riferito alla velocitàpar caratteristica u_C..

Se ora poniamo $u_0 = u_C$ allora le equazioni adimensionalizzata dello strato limite divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + T^*$$

2
2
* * 1 *
* *

$* * \Pr *$
$T\ T\ T$
$u\ v$
$x\ x\ Gr\ y$
$\partial + \partial = \partial$
$\partial\ \partial\ \partial$
Ricordando che deve sempre essere per il coefficiente di convezione termica:
$(\ )$
$y\ 0$
$p\ f$
T
y
h
$T\ T$
λ
$=$
$-$ ∂ ∂
$=$
$-$
ne segue che il numero di Nusselt, Nu, dipende nella convezione naturale solamente da Gr e Pr e
non pi da Re.
Pertanto le relazioni funzionali saranno del tipo:
$Nu = f(Gr, \Pr)$
In molti casi, specialmente per i gas e l’aria, la dipendenza si semplifica nella forma:
$Nu = f(Gr \cdot \Pr) = f(Ra)$
ove si indicato il numero di Rayleigh:
$3\ (\ )$
$\Pr\ p\ g\ L\ T\ T$
$Ra\ Gr$
a
β
ν
$\infty\ -$
$= \cdot =$
Si osservi che avendo trovato l’equivalenza $Gr=Re^2$, con riferimento alla velocit
 caratteristica,
allora si pu dire che il peso della convezione naturale (per altro sempre presente) sensibile quando il
rapporto Re^2
Gr
 >>1.
Nel caso in cui <<1 prevale la convezione forzata mentre se circa 1 i due modi sono
equivalenti.
Si osservi che quanto sopra ricavato per la lastra piana verticale vale in tutti i casi nei quali si
considera la convezione naturale.

6.1.1 ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Si vuole qui riportare il procedimento seguito con l’analisi adimensionale (applicazione del teorema di Buckingam) per la determinazione delle tipologie delle correlazioni per la convezione naturale.

I parametri che intervengono nel fenomeno della convezione sono visibili nelle equazioni dello strato limite prima scritte e pertanto si pu□ affermare che il coefficiente di convezione h □ funzione delle seguenti variabili:

$$h = h(\rho, \mu, g\beta\Delta T, l, c_p, \lambda) \quad [111]$$

ove il prodotto $g\beta\Delta T$ esprime l’alleggerimento termico prodotto dalla differenza di temperatura fra parete e fluido e gli altri simboli hanno il significato gi□ noto.

Per il teorema di Buckingam (o teorema pi-greco) si dimostra che se una grandezza k dipende da m altre variabili e se □ possibile scegliere n variabili indipendenti allora la variabile k si pu□ porre in funzione di m-n gruppi adimensionali.

Nel caso in esame h □ variabile dimensionale e il numero complessive di variabili in gioco □ pari a 7, pertanto se si scelgono come grandezze indipendenti quelle relative al Sistema Internazionale, metro (m), chilogrammo (kg), secondo (s), grado Kelvin (K) allora si pu□ scrivere una relazione funzionale fra 7-4=3 gruppi adimensionali la cui determinazione segue un procedimento analitico relativamente semplice che qui si desidera accennare.

Se la [111] □ valida si supponga di avere un legame funzionale di tipo monomio in modo che si possa scrivere una relazione del tipo:

$$h = C\rho^a \mu^b (g\beta\Delta T)^c l^d c_p^e \lambda^f \quad [112]$$

Per il principio di omogeneit□ le dimensioni di ambo i membri di questa eguaglianza debbono essere uguali.

Pertanto se esprimiamo nel S.I. (che ha le seguenti unit□ di misura fondamentali: M,L,T,θ) le dimensioni di tutti i parametri sopra indicati abbiamo i seguenti sviluppi:

$$[l] = [L]$$

$$[g\beta\Delta T] = \left[\theta^{-1} L T^{-2} \theta\right] = \left[L T^{-2}\right]$$

$$[\rho] = \left[M L^{-3}\right]$$

$$[\mu] = \left[M L^{-1} T^{-1}\right]$$

$$[\lambda] = \left[M L T^{-3} \theta^{-1}\right]$$

$$\left[c_p\right] = \left[L^2 T^{-2} \theta^{-1}\right]$$

$$[h] = \left[M T^{-3} \theta^{-1}\right]$$

Pertanto la [112] diviene:

3 1 3 a 1 1 b 2 c [ ] d 2 2 1 e 3 1 f □□MT −θ − □□ = C □□ML− □□ □□ML− T − □□ □□LT − □□ L □□L T − θ − □□
□□MLT −θ − □□ [113]

Possiamo ora imporre che quanto presente per ciascuna unit□ di misura a primo membro deve
essere uguale al secondo membro e cio□ che si possa scrivere il seguente sistema dimensionale:

0 3 2 per L
1 per M
3 2 2 3 per T
1 per
a b c d e f
a b f
b c e f
e f θ
= − − + + + + □
□ = + + □
□
− = − − − − □
□ □− = − −
[114]

Ne consegue che, essendo la caratteristica del sistema pari a 6-4=2 (7 variabili pari al numero
degli esponenti e quindi pari ai parametri da cui dipende h, 4 unit□ indipendenti del S.I.) ne segue, per il
teorema di Rouch□ e Capelli, che le soluzioni possibili sono ∞^2.

Basta scegliere due delle variabili come indipendenti e risolvere il sistema per esse. Trovate le
soluzioni si trova che la [112] assume la forma:

2 3
2
m n
p c g Tl
h
l
λ μ ρ β
λ μ
= □□ □□ □□ Δ □□
□ □ □ □
[115]

Si possono riconoscere i seguenti gruppi adimensionali:

· Numero di Nusselt definito da:

Resistenza termica per conduzione
=
1 Resistenza termica per convezione
l
hl
Nu
h
λ

λ
= =
· Numero di Prandtl definito da:
Diffusività meccanica
Pr
Diffusività termica
p
p
c
c
μ
μ ρ
λ λ
ρ
= = =
Numero di Grashoff definito da:
2 3
2
2 equivalente a Reynolds
g T l
Gr
β ρ
μ
= Δ
La relazione funzionale [115] diviene, quindi:
$Nu = C \Pr_m Gr_n$ [116]
con C, m, n determinate sperimentalmente mediante best fit.
Si tratta del tipo di relazione visto in precedenza mediante
l’adimensionalizzazione delle equazioni
dello strato limite. In genere per fluidi aeriformi gli esponenti m ed n coincidono
e pertanto si hanno
correlazioni del tipo:
$Nu = C(Gr \cdot \Pr)_n = C \cdot Ra_n$ [117]
ove si indicato con Ra il numero di Rayleigh dato da:
3 2 3 2
2 Pr *p p g Tl c g Tl c*
Ra Gr
β ρ μ β ρ
μ λ μ λ
= · = Δ · = Δ [118]
6.1.2 PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO
Possiamo ancora una volta supporre che il profilo di velocit e di temperatura
adimensionale
siano polinomiali e cio che si possa porre:
3
1 2 3
0
u y y
a a a
u δ δ
  = + +

con le condizioni al contorno:
0

0 per 0
$u\ y$
$u\ \delta$
= =
0
0 per 1
$u\ y$
$u\ \delta$
= =

0 0 per 1
u
$u\ y$
$y\ \delta$
δ
∂
= =
∂

ed ancora che sia:

2 ( )
2
y
per 0 $_p u\ g\ T\ T$
y
β
$\nu\ \delta$
$_\infty \partial = - - =$
∂

Con queste condizioni si trova:

( ) 2 2
0 0
1
4
$_p u\ g\ T\ T\ y\ y$
$u\ u$
$\beta\ \delta$
$\nu\ \delta\ \delta$
$_\infty -\ = -$

Per il profilo di temperatura si pu porre:

3
1 2 3 *
$t\ t$
$y\ y$
$T\ b\ b\ b$
$\delta\ \delta$
= + +

con le condizioni:

$T^* = 1$ per $y = 0$

$T^* = 0 \quad \dfrac{\partial T^*}{\partial y} = 0$ per $y = \delta_t$

$\dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = 0$ per $y=0$

Si trova, pertanto:

$$T^* = 1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

Le esperienze di laboratorio mostrano che i due profili sopra determinati, pur se approssimati per via dell'ipotesi polinomiale, approssimano abbastanza bene gli andamenti reali.

6.1.3 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE

Lo strato limite termico con moto convettivo in regime laminare, cio per $Ra < 10^8$, pu essere calcolato mediante la relazione:

$$\frac{\delta_t}{x} = \frac{3.49}{Ra^{1/4}}$$

valida per $Pr \approx 1$. I parametri termofisici sono calcolati alla distanza x dal bordo di attacco alla temperatura di film gi indicata in precedenza. Per $Pr \neq 1$ si pu usare l'espressione:

1/2
1/4
Pr
3.49 t
x
Ra
δ =

Si osservi che se nell'equazione del momento si trascura il termine di attrito rispetto a quello di alleggerimento termico $g\beta\Delta T$ allora lo strato limite termico risulta proporzionale

al prodotto $(Ra_x Pr)^{-1/4}$.
Si osservi che il nuovo gruppo adimensionale RaPr non contiene la viscosità cinematica:

$( )$
$_2 \mathrm{Pr}\ _p$
$_x$
$g\ T\ T$
Ra
a
$\beta\ _\infty -$
$=$

Questo nuovo gruppo adimensionale è detto Numero di Boussinesque, Bo_x,. Anche il numero locale di Nusselt è funzione dello stesso gruppo adimensionale, cioè:

$$Nu = f\left(Ra_x \mathrm{Pr}\right)^{1/4}$$

6.1.4 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO

Per valori di Ra > 10^8 il moto convettivo assume le caratteristiche di un moto turbolento ed hanno inizio i fenomeni di transizione dal moto laminare con formazione di vortici. Per Ra >10^9 il moto è definitivamente turbolento, almeno per la lastra piana verticale.
Lo strato limite termico può ancora essere calcolato utilizzando le stesse espressioni dello strato limite dinamico per Pr = 1 mentre per valore diversi si applica ancora il fattore correttivo $Pr^{1/2}$.

6.1.5 CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA

La soluzione esatta può essere ottenuta applicando ancora la teoria della similitudine (similarity) e cioè ponendo una variabile di similitudine data dal rapporto:

$^{1/4}$
$_x$
x
yRa
$\eta\ _- =$

Introducendo le funzioni di corrente di flusso (streamfunction):

$u\ ;\ v$
$y\ x$
$= \partial\psi = - \partial\psi$
$\partial\ \partial$

la funzione di similitudine è definita come:

$( )\ ^{1/4} ,\mathrm{Pr}$
$_x$
F
aRa
$\eta = \psi$

Per la temperatura la forma adimensionale si ha:

$(\ ,\mathrm{Pr})$
$_p$
$T\ T$
$T\ T$

$\theta\ \eta\ _\infty$
∞
$= -$
$-$
Per applicare il metodo di Blasius occorre procedere in due fasi: prima si eliminano u e v mediante
le derivate della funzione di corrente, ψ, poi eliminando x, y, ψ e T mediante η, F e θ.
Si possono scrivere le equazioni differenziali:
3
' "
4
$F\theta = \theta$
$_2$ 1 1 3
' " '"
Pr 2 4
$F\ FF\ F\ \theta$ □ □ □ $-$ □ $= - +$
□ □
Le condizioni al contorno sono:
$F = 0$ per $\eta = 0$
$F' = 0$ per $\eta = 0$
$\theta = 1$ per $\eta = 0$
$F' = 0$ per $\eta \to \infty$
$\theta = 0$ per $\eta \to \infty$
La soluzione delle precedenti equazioni risulta piuttosto complessa e viene qui omessa per
semplicit□. Il numero locale di Nusselt □ cos' determinato:

1/ 4
1/ 4
1/ 2
Pr
0.503
Pr 0.986Pr 0.492 $_{x\ x} Nu\ Ra$
$=$ □□□ $+ +$ □□□
valida per tutti i numeri di Prandtl. I valori asintotici sono:
$_{1/4}\ 0.503\ _{x\ x} Nu = Ra$ per Pr >>1
e ancora:
$(\ )_{1/4}\ 0.600\ \mathrm{Pr}\ _{x\ x} Nu = Ra$ per Pr <<1
Entrambe queste correlazioni confermano le aspettative indicate nel □6.1.3. Il valore medio vale:
1/ 4
1/ 4
1/ 2
Pr
0.671
Pr 0.986Pr 0.492
$_{x\ x} Nu\ Ra$
□ □ $=$ □ □ □ $+ +$ □
Per l'aria, avente Pr = 0.72, si ottiene la relazione semplificata:
$_{1/4\ x}\ 0.571\ _x Nu = Ra$
Una relazione valida per qualunque numero di Prandtl e con Ra < 10^{12} □, per

Nusselt medio
(correlazione di Churchill e Chu):

$$Nu_x = \left\{ 0.825 + \frac{0.387\, Ra_x^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$$

che per l'aria, P r= 0.72, diviene:

$$Nu_x = \left(0.825 + 0.325\, Ra_x^{1/6}\right)^2$$

In regime laminare ($Ra < 10^9$) si ha la correlazione:

$$Nu_x = 0.68 + \frac{0.67\, Ra_x^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}$$

che per l'aria, Pr=0.72, diviene:

$$Nu_x = 0.68 + 0.515\, Ra^{1/4}$$

6.1.6 FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE

Supponiamo ora che lungo la parete verticale si abbia un flusso uniforme, q" = cost, e che pertanto la temperatura della stessa parete cresca uniformemente e monotonicamente nella direzione x.

Per fluidi con elevati numeri di Prandtl si ha relazione:

$$( )\quad ( )^{1/4} \quad 3\ ''_{s\,p} \quad p \quad q\ x\ g\ T\ T\ x \quad T\ x\ T\ a \quad \beta \quad \lambda\ \nu \quad \infty \quad \infty$$

Sperimentalmente si è trovata la relazione:

$$Nu_x = 0.616\, Ra_x^{1/5} \left(\frac{Pr}{0.8 + Pr} \right)^{1/5}$$

La turbolenza si ha per $Ra_x > 10^{13}$.

Vlet e Liu propongono le seguenti relazioni:

$$Nu_x = 0.6\, Ra_x^{1/5}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.75\, Ra_x^{1/5}$$

per regime laminare: $10^5 < Ra_x < 10^{13}$, mentre per regime turbolento, $Ra_x > 10^{13}$, si ha:

$$Nu_x = 0.568\, Ra_x^{0.22}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.645\, Ra_x^{0.22}$$

Per l’aria Vlet e Liu propongono le relazioni:

$Nu_x = 0.55\, Ra_x^{0.2}$ laminare

$Nu_x = 0.17\, Ra_x^{0.25}$ turbolento

Chu e Churcill propongono una relazione valida per ogni Ra e Pr:

$$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.38\, Ra_x^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.437}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

Questa relazione richiede che la temperatura di riferimento sia calcolata mediante la differenza con il valore medio della temperatura di parete, cioè:

$$T_f = T_p - T_\infty$$

Per l’aria, Pr = 0.72, la precedente correlazione diviene:

$$Nu_x = \left(0.825 + 0.328\, Ra_x^{1/6} \right)^2$$

In Letteratura si hanno numerose altre correlazioni sperimentali per il calcolo del coefficiente di convezione per diverse situazioni geometriche rispetto alla parete piana verticale sopra vista.

6.1.7 CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE

Si tratta di un caso molto importante per le applicazioni impiantistiche. La lunghezza caratteristica L è data dal rapporto:

$$L = \frac{A}{P}$$

ove A è l'area della piastra e P è il perimetro. Le situazioni di scambio termico possibili sono diverse a seconda della posizione della lastra piana e questa è a temperatura maggiore (riscaldamento) o minore (raffreddamento) rispetto al fluido.

Con lastra piana calda rivolta verso l'alto o anche con lastra piana fredda rivolta verso il basso si possono usare le correlazioni:

$$Nu_L = 0.54\, Ra_L^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^4 < Ra < 10^{11}$) mentre per regime turbolento ($Ra > 10^{11}$) si ha:

$$Nu_L = 0.15\, Ra_L^{1/3}$$

negli altri due casi, cioè lastra piana calda rivolta verso il basso o lastra piana fredda rivolta verso l'alto, non si dovrebbe verificare alcuna convezione termica.

In realtà si hanno deboli flussi termici difficilmente stimabili e dovuti a disturbi casuali del moto del fluido.

6.2 CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGHI

Il parametro geometrico di riferimento è il diametro D e il numero di Nusselt locale varia, come già visto per la convezione forzata, con la posizione lungo la circonferenza. Il valore medio circonferenziale è dato dalla relazione:

$$Nu_D = 0.53\, Ra_D^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^3 < Ra < 10^9$). Per il regime turbolento ($10^9 < Ra < 10^{12}$) si ha:

$$Nu_D = 0.13\, Ra_D^{1/3}$$

Recentemente è stata proposta una correlazione più complessa ma più precisa:

$$Nu_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387\, Ra_D^{1/6}}{\left[1 + \left(0.559/Pr\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$$

valida sia in regime laminare che turbolento.

6.3 CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE

Questo argomento è oggi di grandissimo interesse non solo per gli aspetti relativi alla trasmissione del calore ma anche per gli aspetti epistemologici relativi ai sistemi dissipativi secondo le teorie di Y. Prigogine.

La convezione termica avviene all'interno di domini chiusi (di forma parallelepipeda o fra superfici piane affacciate con diversa temperatura. In Figura 61 si ha una cavità a sezione rettangolare con due lati adiabatici con lato caldo a sinistra e lato freddo a destra.

Nella figura a destra si ha la distribuzione di temperatura che indica la formazione di uno strato limite ascendente sul lato caldo e di uno strato limite discendente sul lato freddo.

Il flusso termico è calcolato sempre con la relazione di Newton con coefficiente di convezione da valutare alla temperatura media:

$$T_{fm} = \frac{T_c + T_f}{2}$$

con T_c e T_f temperature del lato caldo e freddo.

Il numero di Grashoff è calcolato con la relazione:

$$Gr = \frac{g \beta (T_c - T_f) H^3}{\nu^2}$$

con H altezza delle superfici attive. Per Ra bassi ($< 10^3$) si hanno ridottissimi movimenti del fluido e la trasmissione del calore avviene quasi esclusivamente per conduzione termica attraverso lo stesso fluido e quindi si ha:

$$Q \cong \lambda \frac{S}{b} (T_c - T_f)$$

ove b è lo spessore della cavità ed S l'area della sezione verticale (non adiabatica) e λ il coefficiente di conducibilità termica del fluido. La precedente relazione implica che il numero di Nusselt riferito alla larghezza della cavità è:

$$Nu_b \quad hb \quad 1$$

λ
= ≈
Figura 61: Convezione naturale in una cavit□ chiusa
Quanto detto vale per rapporti H/b compresi fra 2 e 10 per $Ra < 10^3$ e per H/b fra 10 e 40 per
$10^3<Ra<10^4$. Per valori pi□ elevati di Ra si instaura una circolazione di fluido che diviene sempre pi□par consistente e il numero di Nusselt □ dato dalla relazione:
0.28 1.09 Pr
0.22
0.2 Pr *b*
b
Nu Ra
H
= □□□ + □□□ □□□ □□□
valida per $10 < H/b < 40$, $Pr < 10^5$ e $10^4 < Ra < 10^{13}$. Si ha la correlazione:
1.05
0.42 0.25 *b*
b
Nu Ra
H
□ □ = □ □
□ □
valida per $10 < H/b < 40$, $1 < Pr < 10^4$ e $10^7 < Ra < 10^{11}$. Per valori di H/bI > 40 si pone
sempre H/b=40 nella precedente correlazione.
Nel caso di cavit□ sottili, con H/b <1 allora il comportamento termico dipende dal tipo di
trasmissione alle pareti.
Per flusso costante alle pareti si ha la correlazione:
1/9
2/9 0.34
H
Nu Ra
b
□ □ = □ □
□ □
con Ra_H dato dalla relazione:
4 "
H
g H q
Ra
a
β
ν λ
=
Nel caso in cui si calcoli Ra con la relazione:

3
H Ra g TH
Ra
Nu a

β
ν
$= = \Delta$
allora la correlazione da utilizzare □ la seguente:
$1/7$
$2/7\ 0.25\ _H$
H
$Nu\ Ra$
b
□ □ = □ □
□ □
Si □ osservato sperimentalmente che nel caso in cui si abbia temperatura di parete costante si
possono usare la stessa correlazione sopra indicata purch□ il numero di Rayleight sia calcolato con
riferimento alla temperatura media fra la parete calda e quella fredda.

6.3.1 CAVIT□ RISCALDATE DAL BASSO

La differenza fra le cavit□ riscaldate lateralmente e quelle riscaldate dal basso □ che ora le cavit□par sono riscaldate dal lato vuoto e non da una parete, come illustrato in Figura 62).
Queste cavit□, dette anche Celle di B□ard, attivano una circolazione di fluido anche con pochi
gradi di differenza di temperatura fra la superficie inferiore e quella superiore.
Il valore critico perch□ questa circolazione avvenga □ che si abbia:
$1708\ _H Ra \geq$
con Ra_H dato da:
$(\ )\ ^3$
$_{H\ c\ f}$
$Ra\ g\ T\ T\ H$
Ra
$Nu\ a$
β
ν
$-$
$= =$
La circolazione che si instaura □ caratteristica di queste celle, vedi figura, che pu□ anche diventare
turbolenta incrementando sensibilmente il flusso termico dal basso verso l'alto.
Sperimentalmente si □par trovata valida la correlazione:
$_H\ 0.069\ _H{}^{1/3}\ \Pr^{0.074}\ Nu = Ra$
con propriet□ termofisiche calcolate alla temperatura media. Per $Ra_H > 10^9$ si ha una
proporzionalit□ diretta di Nusselt con $Ra_H^{0.33}$ con flusso indipendente dallo spessore H della cella.
Figura 62: Cavit□ riscaldate dal basso (Celle di B□ard)

Al di sotto del valore di 1708 il moto del fluido □ del tutto trascurabile e il flusso □ praticamente
solo conduttivo. Le celle di B□ard sono utilizzate per raffreddare mediante convezione naturale
superfici molto calde, come ad esempio le lampade allo iodio usate nei

proiettori luminosi.

6.4 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE

Tabella 14: Correlazioni per la convezione naturale

Tabella 15: Correlazioni per la convezione naturale

Tabella 16: Correlazioni per la convezione naturale

Tabella 17: Correlazioni per la convezione naturale

Tabella 18: Correlazioni per la convezione naturale

6.5 GETTI E PENNACCHI

Lo studio dei getti e dei pennacchi riveste notevole interesse sia industriale che ambientale. Si tratta di due esempi di convezione termica non confinata, cioè non limitata da superfici solide: una corrente fluida (getti o fumi) induce un moto convettivo della massa esterna (ad esempio aria per il caso dei pennacchi).

Con riferimento alla Figura 63, una corrente di fluido immesso attraverso un orifizio, dopo una zona iniziale (circa 6 volte la dimensione del foro nel quale la velocità media coincide con quella a monte dell'orifizio) passa dalla zona laminare a quella turbolenta.

Uo, To
Formazione
del getto
Zona della crescita lineare
Distribuzione della velocita'
Formazione dei vortici

Figura 63: Formazione del getto (zona turbolenta)

Il getto si allarga man mano che si procede in avanti e si parla di una zona di accrescimento lineare dello spessore del getto.

La distribuzione della velocità nel getto si dimostra, partendo dalle equazioni allo strato limite turbolento, che è di tipo esponenziale secondo la relazione:

$$u = u_c e^{-\left(\frac{r}{b}\right)^2}$$

ove è $b = 0.107\,x$ ed u_c è la velocità sull'asse. Analogamente la distribuzione di temperatura è:

$$\left(T - T_\infty\right) = \left(T_c - T_\infty\right) e^{-\left(\frac{r}{b_T}\right)^2}$$

con $b_T = 0.127\,x$. Le precedenti equazioni necessitano dei valori della velocità e della temperatura sull'asse del getto. Si dimostra che vale la seguente relazione:

2 2
0 0 0
2
4

$u\ rdr\ U\ D$

$\pi\ \rho\ \rho\ \pi\ _{\infty} \int\ =$

Combinando con l’equazione della distribuzione di velocit□ si ottiene il valore della velocit□par sull’asse:

$6.61\ _{0\,0\,c}$

$U\ D$

u

x

$=$

Si osservi come questa velocit□ decresce al crescere di x e che per x = 6.61 D_0 si ha $_{c\,0}u = U$.

Si dimostra ancora valida la relazione:

$_2(\ )\ (\ )\ _2$

$0\,0\,0\,0$

2

$4\ _{p\,p}c\ u\ T\ T\ rdr\ c\ U\ T\ T\ D$

$\pi\ \rho\ \rho\ \pi\ _{\infty}$

$_{\infty\,\infty}\int\ - = -$

Combinando con l’equazione della distribuzione della temperatura si ottiene:

$(\ )\ _0$

$_0 5.65\ _c$

$T\ T$

$T\ T\ D$

x

∞

∞

$-$

$- =$

Quindi l’eccesso di temperatura decresce ancora con la distanza x dall’orifizio.

Se un getto viene orientato su una parete verticale allora nell’area della sezione del getto si hanno coefficienti di convezione elevati.

Pertanto si usano i getti per il raffreddamento rapido ed intensivo di superfici particolarmente calde (ad esempio le palette delle turbine, …).

Per i pennacchi si ha una situazione del tipo descritto in Figura 64.

La sorgente di calore innesca un movimento ascensionale di fluido caldo che, a partire da una certa distanza da questa, innesca moti turbolenti con formazione di vortici che trascinano (entrainment) il fluido circostante.

Le distribuzioni di velocit□ e di temperature hanno ancora l’andamento esponenziale gi□ visto in precedenza per i getti con valori delle costanti da determinare sperimentalmente.

Zona della crescita lineare
Distribuzione della velocita'
Sorgente di calore
Formazione
del vortice
T

ambiente
Pennacchio
Figura 64: Formazione di un pennacchio
In Figura 65 si ha un esempio di pennacchio reale formatosi al di sopra di una torcia di blow down
di uno stabilimento industriale.
Maggiori informazioni sono reperibili nei manuali specializzati.
Figura 65: Formazione di un pennacchio in una torcia di raffineria

7 METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD)
7.1 LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA
La soluzione dei problemi di fluidodinamica molto pi complessa di quella vista per la
conduzione termica. Le equazioni differenziali (Navier Stokes pi equazione dell’energia) sono di tipo
alle derivate parziali, non lineari, paraboliche, ellittiche e iperboliche al tempo stesso.
L’applicazione del metodo alle differenze finite porta a notevoli diversit
rispetto a quanto gipar visto per la conduzione. A causa della non linearit del problema. Una evoluzione del metodo alle
differenze finite il metodo ai volumi finiti.
In questo caso si suddivide il dominio di applicazione delle equazioni differenziali in una serie di
volumi di controllo, opportunamenti selezionati, su cui integrare le equazioni stesse usando profili noti
della variabile incognita.
Nei volumi di controllo debbono valere le leggi di conservazione gi descritte (massa, energia,
quantit di moto, …) in modo del tutto simile a quanto visto per il metodo alle differenze finite..
Proprio questa conservazione delle grandezze fondamentali il principale vantaggio del metodo a
volume di controllo.
In genere per evitare divergenze matematiche si usano varie metodologie risolutive (vedi, ad
esempio, metodo upwind)
Un secondo importante metodo utilizzato il metodo agli elementi finiti (FEM) che qui
brevemente si sintetizza. In questo caso, in analogia con il metodo delle differenze finite, si cerca la
soluzione delle equazioni differenziali per approssimazioni successive su elementi per i quali la
soluzione nota o ipotizzabile in modo quasi esatto.
Il metodo agli elementi finiti assume una funzione approssimata che soddisfi i vincoli della PDE
di partenza e che dipenda da parametri da ottimizzare (ad esempio minimizzando l’energia totale). Esso
definisce a priori l’andamento della soluzione su singole porzioni (elemento finito, EF) del continuo
connesse alle altre in dati punti.
Pertanto si suddivide il continuo con una griglia (mesh) che delimita gli

Elementi Finiti (EF). La
griglia definisce: volume, posizione dei nodi ed appartenenza dei nodi ad uno o più EF.
Gli EF si scambiano azioni solo tramite i nodi. Si assumono andamenti "semplici" delle variabili
all'interno degli EF.
Si impongono condizioni di continuità e congruenza nei nodi e, in parte, sui contorni degli EF
confinanti.
Le equazioni di vincolo dei nodi formano un sistema globale che viene risolto con i classici
metodi matriciale.
In definitiva si ha la seguente procedura:

Discretizzazione , soluzione definita "a pezzi", continuità e congruenza sui bordi

7.2 LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD)

Lo scopo della Fluidodinamica Computazonale (CFD) è quello di formulare modelli adatti a descrivere i
fenomeni fluidodinamici. Considerazioni sulla natura dei fluidi e analisi del livello di scala spaziale,
temporale e dinamico della realtà sono gli strumenti indispensabili per formulare modelli fisici per la
fluidodinamica che possiedano il requisito di riprodurre la realtà con il livello di approssimazione desiderato.
L'effettiva validità di ogni modello, in quanto necessariamente approssimato, dovrà poi essere
verificata confrontando le previsioni che esso è in grado di fornire con dati sperimentali, oppure con le
previsioni di altri modelli fisici ottenuti con un livello minore di approssimazione. Conoscere un
fenomeno fluidodinamico significa conoscere compiutamente (sebbene con un certo livello di
approssimazione) la distribuzione spaziale e l'evoluzione temporale di un certo numero di variabili
fluidodinamiche (velocità, temperatura, pressione, ecc.) che lo caratterizzano. Il numero minimo di tali

variabili dipende, di volta in volta, non solo dal tipo di fenomeno, ma anche dal livello di
approssimazione con cui desideriamo conoscerlo.
Figura 66: Schema della modellizzazione fluidodinamica
Come indicato nel diagramma di Figura 66, a tale conoscenza si può pervenire, dopo averne
formulato un modello fisico, sia attraverso misure sperimentali dirette di tali variabili, sia risolvendo
sistemi di equazioni le cui variabili sono appunto tali proprietà fluidodinamiche.
Si tratta di quelle che, con un termine poco felice, ma ormai universalmente diffuso, prendono
rispettivamente il nome di simulazione fisica, o sperimentale, e di simulazione numerica. Nel secondo caso, il

passo che è necessario compiere dopo aver formulato un modello fisico consiste nel tradurlo in un modello fisico-matematico.

Il passaggio dal modello fisico a quello fisico-matematico si basa su alcune leggi fondamentali della fisica, che impongono che in un sistema di fluido, come in ogni altro sistema dinamico della meccanica classica, determinate grandezze quali la massa, la quantità di moto generalizzata e l'energia soddisfino precise equazioni di bilancio che esprimono quelli che, più o meno propriamente, prendono il nome di principi di conservazione.

Nell'ambito della fluidodinamica classica, ovvero nell'ambito del livello di approssimazione della realtà del continuo deformabile di tipo newtoniano , il più completo tra i modelli fisico-matematici è costituito dal sistema di equazioni di Navier-Stokes che esprime, appunto, il principio di conservazione della massa, il teorema della quantità di moto e il principio di conservazione dell'energia totale.

Una volta che siano note l'equazione di stato e le proprietà fisiche del fluido in esame, questo sistema di equazioni differenziali, integrato numericamente, secondo la tecnica che prende il nome di

DNS, (da Direct Numerical Simulation), è perfettamente in grado di descrivere a livello microscopico anche la più complicata delle correnti.

Ad esempio, è in grado di riprodurre compiutamente tutti i dettagli di una corrente turbolenta (e pertanto caratterizzata da una marcata tridimensionalità e non stazionarietà), anche in presenza di fenomeni termici, di reazioni chimiche, etc[22].

Tuttavia è estremamente utile analizzare come l'introduzione di successive ipotesi di approssimazione spaziale, temporale e dinamica consenta di ottenere modelli fisici di validità e complessitàpar decrescenti, a partire da quello che presenta il massimo di complessità e di generalità (diagramma 2 di Figura 67).

Un primo passo nella semplificazione del modello fisico-matematico lo si può compiere se invece di voler approssimare la realtà fisica a livello delle scale microscopiche, si accetta di descriverla con livelli di accuratezza spaziale e temporale meno raffinati.

Il modello fisico-matematico che si ottiene è quello che prende il nome di LES (da Large Eddy Simulation).

Non è il caso di entrare ora nei dettagli di questa tecnica, ma si può facilmente intuire che l'aver ridotto così drasticamente i requisiti di risoluzione spaziale e temporale del problema porterà ad una altrettanto drastica riduzione del costo e del tempo necessari per effettuare un'eventuale simulazione numerica del fenomeno, a fronte di una perdita di informazioni che pu□ ritenersi, nel caso in esame, del tutto accettabile, se non addirittura benefica.

Tuttavia, se ci limitassimo a risolvere le equazioni di Navier-Stokes semplicemente adottando una scarsa risoluzione spaziale e temporale, commetteremmo un gravissimo errore. Non si pu□ negare che le considerazioni appena fatte siano sensate, ma nel nostro ragionamento abbiamo assunto implicitamente (e in modo del tutto ingiustificato) che, dal momento che certi dettagli del fenomeno non ci interessano, questi sono automaticamente ininfluenti per la sua evoluzione reale: quanto avviene a livello microscopico (il livello che abbiamo deciso di trascurare) pu□ anche non interessare affatto a chi desidera effettuare un’analisi a livello macroscopico.

La perdita dei dettagli del moto turbolento a livello microscopico deve essere pertanto compensata, almeno statisticamente, da altre informazioni che devono essere reintrodotte nel modello fisico attraverso modelli aggiuntivi: i cosiddetti modelli di turbolenza sottogriglia, il cui nome indica appunto che □ loro affidato il compito di riprodurre tutti gli effetti dinamici di quanto avviene alle scale del moto inferiori a quella della griglia di discretizzazione.

Il problema □ concettualmente identico a quello che ha portato dal modello molecolare del gas a quello del continuo deformabile. Un modello che riproduca ogni dettaglio del moto molecolare di un gas □, non solo estremamente oneroso, ma anche spesso del tutto inutile dal punto di vista pratico, tuttavia quanto avviene a livello molecolare pu□ essere trascurato soltanto a condizione che l'inevitabile perdita di informazione venga compensata dall'equazione di stato e da informazioni sulle propriet□par fisiche statistiche del fluido.

In molti casi, si pu□ rinunciare a conoscerne i dettagli, non solo a livello delle scale spaziali e temporali delle singole particelle fluide, ma addirittura anche a quello delle grandi strutture turbolente: in altre parole, pu□ essere sufficiente descrivere quello che prende il nome di moto medio e apprezzarne l'evoluzione temporale mediando su intervalli di tempo di durata variabile tra qualche minuto e, al limite, l'intera durata del fenomeno.

Questo secondo livello di approssimazione porta al modello fisico-matematico delle equazioni mediate di Reynolds. Anche in questo caso, e in misura ancor maggiore che nel caso della LES, si ottiene un'enorme riduzione del costo e del tempo necessari per ottenere una simulazione numerica dell'intero

fenomeno.
22 Problemi complessi ottenuti dalla somma di diversi problemi di simulazione (diffusione, reazioni chimiche,
campi dinamici, ...) sono detti multifisici e sono caratterizzati da un numero elevato di equazioni differenziali alle derivate
parziali spesso anche fra loro correlate.

Figura 67: Applicazione delle ipotesi spaziali e temporali al modello CFD
Ci sono addirittura delle situazioni in cui il moto in media stazionario il che rende del tutto
superflua la sua discretizzazione temporale, oppure casi in cui la corrente media bidimensionale, ovvero
indipendente da una delle coordinate spaziali, nel qual caso la discretizzazione spaziale del problema
potrebbe essere limitata al solo piano del moto medio.
Ovviamente il sistema delle equazioni mediate di Reynolds deve essere integrato con
informazioni fornite da modelli di turbolenza. A differenza dei modelli sottogriglia della LES, ai modelli di
turbolenza per le equazioni mediate di Reynolds affidato il compito di riprodurre gli effetti dinamici dell'intero
spettro dei moti tridimensionali e non stazionari che caratterizzano la corrente turbolenta. Compito che li
rende piuttosto complicati e scarsamente generali.

Ulteriori modelli semplificati sono derivabili a partire dal modello delle equazioni mediate di
Reynolds, sulla base di successive approssimazioni dinamiche,la prima delle quali quella di numero di
Reynolds elevato. Il numero di Reynolds uno dei parametri dinamici fondamentali ed esprime
essenzialmente il peso relativo delle forze d'inerzia del fluido rispetto a quelle viscose, nella particolare
corrente in esame.
Un numero di Reynolds elevato significa quindi che, in un determinato fenomeno, gli effetti delle
forze d'inerzia sono mediamente preponderanti (anche di vari ordini di grandezza) rispetto a quelli delle
forze viscose Se verificata la condizione che il numero di Reynolds della corrente elevato, pupar talvolta verificarsi anche una seconda condizione.
Pu succedere che all'interno di un moto che rimane pur sempre tridimensionale e non
stazionario, la velocit media con cui viene trasportato il fluido abbia una componente decisamente
prevalente rispetto alle altre e si pu quindi identificare una direzione dello spazio, che prende il nome
di direzione del moto medio, lungo la quale i fenomeni convettivi sono decisamente preponderanti rispetto a
quelli diffusivi. In tali condizioni, si possono quindi ritenere trascurabili gli effetti della diffusione

viscosa e turbolenta nella sola direzione del moto medio e si ottiene il modello fisico-matematico che prende il nome di equazioni di N-S parabolizzate.

Qualora, poi, verificate le ipotesi appena descritte, si verifichi anche che il verso della velocit� nella direzione del moto medio � ovunque il medesimo, si pu� adottare una geniale approssimazione dinamica, dovuta a Prandtl. Egli intu� che, sotto opportune condizioni (la prima delle quali � un elevato numero di Reynolds, la seconda � l'assenza di controcorrenti), gli effetti dinamici diffusivi, associati alla presenza di vorticit�, viscosit� e turbolenza, possono essere confinati in regioni del dominio di moto di spessore estremamente limitato, che si sviluppano in corrispondenza delle pareti solide lambite dalla corrente e che prendono appunto il nome di strati limite o, meglio, di strati vorticosi sottili.

Da una lucida analisi del peso relativo delle forze in gioco, Prandtl dedusse che, non solo il moto medio all'interno di questi strati poteva essere descritto da forme semplificate delle equazioni di Navier-Stokes, che prendono appunto, come gi� visto in precedenza, il nome di equazioni dello strato limite (o degli strati vorticosi sottili), ma anche che, all'esterno di tali strati di corrente, gli effetti della viscosit� del fluido potevano essere completamente trascurati.

Deduzione, quest'ultima, non meno importante della prima, dal momento che consente di ritenere che il campo di moto all'esterno degli strati limite sia determinabile prescindendo completamente dagli effetti della viscosit�. Ne deriva che in una (gran) parte del dominio, il comportamento della corrente pu� essere descritto dalle equazioni di Eulero, un modello fisicomatematico che si ottiene a partire dalle equazioni di Navier-Stokes nell'ipotesi, appunto, di poter eliminare completamente gli effetti della viscosit� nelle equazioni di bilancio per la quantit� di moto e per l'energia. L'accoppiamento tra quelli che prendono, molto impropriamente, il nome di modello viscoso (le equazioni di Prandtl che governano il moto nelle regioni vorticose sottili) e modello non viscoso (valido all'esterno di esse) avviene essenzialmente attraverso la variabile scalare pressione.

Altri modelli semplificati si possono ottenere a patto che sia verificata un'ulteriore approssimazione dinamica sul peso relativo tra le forze elastiche con cui il fluido, comprimendosi o espandendosi, reagisce alle variazioni della pressione e, ancora, le forze d'inerzia.

Se tale rapporto � piccolo, ovvero se il numero di Mach della corrente � tale da garantire l'assenza di onde d'urto, l'atto di moto nelle regioni esterne agli strati limite � irrotazionale

e quindi descrivibile con
un modello pi□ semplice di quello di Eulero, ovvero con il modello del potenziale completo.
E se, al limite, si pu□ ragionevolmente assumere che le pressioni in gioco siano tali da non
alterare la densit□ del fluido,si pu□ formulare l'ipotesi di completa incomprimibilit□,che porta a descriverne
il moto con una semplice equazione di Laplace per il potenziale cinetico.
Nei casi in cui l'atto di moto all'esterno degli strati limite sia irrotazionale, il campo della
pressione, che descrive compiutamente lo stato di sforzo nella corrente (essendo ivi nulli gli effetti della
viscosit□) pu□ ottenersi semplicemente con l'equazione di Bernoulli, a partire dal campo di velocit□par fornito dalle equazioni del potenziale.
Si □ gi□ accennato al fatto che, anche in una corrente turbolenta, le variabili fluidodinamiche
medie possono presentare talvolta gradienti nulli lungo una direzione dello spazio.

E' evidente che, in questi casi, □ sufficiente fornirne una descrizione nel solo piano normale alla
direzione di uniformit□ (il cosiddetto piano del moto medio).
Qualora le direzioni di uniformit□ fossero due, anzich□ una, la corrente media potrebbe essere
ovviamente descritta con un modello monodimensionale.Una situazione del genere non si presenta mai nel
mondo reale, ma esistono effettivamente correnti, stazionarie e non, nelle quali i gradienti di alcune
grandezze fluidodinamiche sono relativamente piccoli in una gran parte del campo di moto.
Figura 68: Gerarchia dei modelli di simulazione
E' questo il caso di alcune correnti interne a condotti che presentano un'estensione longitudinale
assai maggiore di quella trasversale: se si escludono le regioni (magari sottili) adiacenti alle pareti solide e
quelle in cui si verificano variazioni brusche della direzione o del modulo della velocit□ media, velocit□ e
pressione si mantengono praticamente uniformi in ciascuna sezione del condotto e presentano gradienti
significativi soltanto nella direzione del moto medio, il quale pu□ pertanto essere descritto con una
forma monodimensionale delle equazioni di Eulero, se il fluido □ comprimibile, oppure da forme
monodimensionali dell'equazione di continuit□ e della quantit□ di moto, nel caso di fluidi a propriet□par costanti.
Nel caso di correnti stazionarie di fluidi a propriet□ costanti, il modello che si deriva dall'ipotesi di
monodimensionalit□ prende il nome di teoria delle reti.
E' chiaro per□ che un modello di questo genere □ utilizzabile solo se accoppiato a modelli aggiuntivi
che siano in grado di tenere conto di tutti quegli effetti tridimensionali che,

sebbene abbiano luogo in regioni effettivamente limitate del campo di moto, non per questo devono avere conseguenze trascurabili.

Queste informazioni aggiuntive sono generalmente costituite da coefficienti e correlazioni di origine sperimentale, che prendono il nome di coefficienti di perdita di carico.

Si conclude osservando che la gerarchia di modelli fisico-matematici fin qui esaminata par rappresentativa della quasi totalit dei problemi della fluidodinamica classica. La parte iniziale di questa trattazione verr dedicate, con particolare attenzione, alla formulazione del modello generale delle equazioni di Navier-Stokes. Successivamente si esamineranno i problemi relativi alla loro integrazione numerica diretta (DNS), si accenner alle equazioni per la LES ed infine a quelle mediate di Reynolds.

Per queste ultime si affronter il “problema della chiusura”, gi introdotto nei capitoli precedenti, prestando in particolar modo attenzione al modello a due equazioni differenziali (K-ε),il quale stato pi volte applicato nelle simulazioni fluidodinamiche. La gerarchia dei metodi di modellazione in funzione dell’applicazione considerarta riportata nel diagramma 3 di Figura 68:

7.3 MODELLO AD UN’EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSIT TURBOLENTA

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosit turbolenta, sono stati sviluppati i modelli differenziali che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o pi equazioni differenziali che descrivono, o direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o pi grandezze scalari correlate con la viscosit cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq.

Il vantaggio che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosit turbolenta tenendo conto della effettiva storia della corrente. Quando il modello prevede la soluzione di un'unica equazione differenziale (si parla di modelli di ordine uno), la viscosit turbolenta generalmente correlata ad un'equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta. Fu lo stesso Prandtl che,vent'anni dopo i suoi lavori sulla mixing length, e sfruttando un'intuizione di Kolmogorov, apr la via ai modelli differenziali di turbolenza, formulandone uno basato su di un'equazione di bilancio per la grandezza scalare energia cinetica turbolenta media specifica K , che si indicher nel seguito semplicemente con il termine di energia cinetica turbolenta, e che definita come:

$$K = \frac{1}{2}\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right) \quad [119]$$

Nel nuovo modello differenziale, Prandtl conserva il principio che la viscosità cinematica turbolenta sia esprimibile attraverso il prodotto di una velocità turbolenta $\nu_{(t)}$ e di una lunghezza di mescolamento ma lascia cadere la relazione $\nu_{(t)} = l_m^2 \frac{\partial u}{\partial y}$.

Invece di esprimere la velocità turbolenta attraverso il prodotto del gradiente della velocità media per la lunghezza di mescolamento, assume che tale velocità di agitazione sia direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta K :

$$\nu_{(t)} \propto K^{1/2} \quad [120]$$

Sotto tali ipotesi, quindi, la relazione:

$$\nu_{(t)} = \nu_{(t)}\, l_m \quad [121]$$

diventa:

$$\nu_{(t)} = l\, K^{1/2} \quad [122]$$

dove, in luogo di l_m^2 si è indicata la lunghezza l che, anche nei modelli ad una equazione differenziale, continua ad essere calcolata con formule opportune, esattamente come avveniva nel modello algebrico di Prandtl per la lunghezza di mescolamento l_m. In questo tipo di modello, dunque, si mantiene il concetto di viscosità turbolenta, ma nella sua espressione non compaiono più termini legati

al gradiente della velocità media, bensì termini contenenti l'energia cinetica turbolenta K, la quale può par essere calcolata, in modo del tutto generale, in ogni istante ed in ogni punto del campo di moto, sulla base di un'equazione differenziale di trasporto che si deriva con un procedimento concettualmente semplice, ma piuttosto laborioso.

Di fatto, si tratta di:

- a) moltiplicare l'i-esima componente dell'equazione di bilancio per la quantità di moto, relativa alla velocità istantanea $u_i = \overline{u}_i + u'_i$, per la componente i-esima u'_i della velocità fluttuante;
- b) sommare le tre equazioni così ottenute e
- c) mediare nel tempo l'equazione risultante.

Ciò che si ottiene è la seguente equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K , per unità di massa:

∂
∂
∂
∂
−
−−
∂
∂
∂
+∂
∂
∂
=−
∂
+∂
∂
∂
j
i
j
i
i i j j
j j j
i
i j
j
$_j x$
u
x
u
u u u p u
x
K
x x
u
u u
x
K
u
t
K ν
ρ

'' ν ''' 1 ''
2
1
[123]
Variaz tot di K Produzione diff.molecolare trasporto diff. press dissipazione
turb

Il primo membro dell'equazione di bilancio [123] rappresenta, come di consueto,la variazioni totale di K , e cio la somma delle derivate temporale e convettiva. Tutti i termini hanno le dimensioni di [$m^2 \cdot s^{-3}$], ovvero di un'energia per unit di tempo e per unit di massa, e cio di una potenza per unit di massa. Il primo termine al secondo membro indica la produzione per unit di massa e di tempo (si tratta quindi di una velocit di produzione) di energia cinetica turbolenta operata dal tensore degli sforzi di Reynolds e viene generalmente denotato con P_K, il secondo, la velocit di diffusione molecolare di energia cinetica turbolenta, il terzo, la velocit di trasporto di K da parte delle fluttuazioni della velocit, il quarto, la velocit di diffusione di K per opera delle fluttuazioni della pressione, il quinto, infine, la velocit di dissipazione, che si indica con ε_K .

Poi si pu osservare che una parte del termine di produzione di K esattamente lo sforzo di Reynolds. Pertanto, in base alla sua definizione

$$\left(S_t\right)_{ij} = u'_i u'_j$$

all'ipotesi di Boussinesq

$$-\left(S_t\right)_{ij} = \nu_{(t)} 2 e_{ij}$$

questo termine pu essere riscritto come:

( )
2
' '

∂
∂
=
∂
∂
−
j
i
t
j
i
i j
x

u
x
u
$u\ u\ \nu$ [124]
Se si esclude il termine di diffusione molecolare, che coinvolge la variabile K e la viscosità par molecolare,che è nota, tutti gli altri termini dell'equazione [124] contengono prodotti,o correlazioni,tra fluttuazioni della velocità e della pressione e devono essere,pertanto, modellati.

Il termine più critico,da questo punto di vista,è quello di diffusione di K per fluttuazione della pressione che,fortunatamente,è sufficientemente piccolo da poter essere o trascurato oppure modellato insieme al termine di trasporto turbolento di K, assumendo che:

$( )$
$K\ j$
t
$i\ i\ j\ j$
x
K
$u\ u\ u\ p\ u$
∂
$- = - \partial$
σ
ν
ρ
$' ' '\ 1\ ' '$
2
1 [125]

dove σ_K è un coefficiente empirico, che prende il nome di numero di Prandtl per la diffusione turbolenta.

Per quanto concerne invece il termine di dissipazione di energia cinetica turbolenta, l'analisi dimensionale, nelle ipotesi di Kolmogorov, suggerisce di esprimerlo in funzione di K e di una lunghezza, che è quella di mescolamento l, secondo la relazione:

l
K
C
x
u
x
u
D
j
i
j
i
$3\ 2$
$=$ □
□
□

∂
∂
∂
∂
ε =ν [126]
dove $_D C$ un parametro che deve essere assegnato, di volta in volta, in funzione del tipo di
corrente.
In conformit a queste ipotesi, l'equazione [126] diventa dunque:
( )
( )
l
K
C
x
K
x x
u
x
K
u
t
K
D
K j
t
j j
i
t
j
j
2 3 2
−
∂
∂
+
∂

∂ +

∂
∂
=
∂
+ ∂
∂
∂
σ
ν
ν ν [127]

Variaz tot di K Produzione diffusione e trasporto dissipazione

La [127] contiene ora solo grandezze medie e pu essere finalmente integrata e fornire, istante per istante, la distribuzione spaziale di K, purch si sia in grado di assegnare condizioni iniziali ed al contorno anche per questa nuova variabile media. Per quanto concerne la superficie di contorno all'ingresso del dominio di calcolo (quella che, in generale, prende il nome di sezione di inflow) par necessario assegnare la distribuzione di K , mentre, sulle eventuali pareti solide, si impone, ovviamente, la condizione di K = 0 .

A titolo di esempio, vediamo di riscrivere e di discutere l'equazione per K nel caso particolare di strato limite turbolento sottile non separato, con moto medio bidimensionale. Negli strati limite sottili, come vedremo pi avanti, la componente della velocit normale alla parete, che indichiamo con v, par generalmente piccola rispetto alla componente parallela, u. Inoltre, il gradiente della velocit in direzione parallela alla parete, che indichiamo con x, piccolo rispetto a quello in direzione normale, y.

Nelle ipotesi di strato limite sottile, quindi, la [127] pu essere riscritta nella forma:

( )
( )
l
K
C
y
K
y y
u
y
K
v
x

K
u
t
K
D
K
t
t
2 3 2
−
∂
∂
+
∂
∂ +
∂
= ∂
∂
+ ∂
∂
+ ∂
∂
∂
σ
ν
ν ν

dove $_D C$ è una costante che ha valori dell'ordine di 0.07÷0.09, mentre il numero di Prandtl assume valore pari all'unità. Nel caso degli strati limite sottili, il modello che consente di determinare la viscosità cinematica turbolenta isotropa ν(t) in base all'equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K per unità di massa può quindi essere riassunto nella forma seguente:

( ) l K $_t$ ν =

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial y}\right] + \nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - C_D\frac{K^{3/2}}{l} \qquad [128]$$

$C_D = 0.07 \div 0.09; \quad \sigma_K = 1.0$

In base alle [128] è quindi ancora necessario prescrivere un'opportuna distribuzione della lunghezza l in funzione della coordinata y, che può essere anche di tipo algebrico. La legge di variazione di l naturalmente dipende dal tipo di corrente considerata.

Nel caso di correnti turbolente di parete è usuale assumere $l = c_1 x_n$, dove x_n è la distanza dalla

parete, ed il coefficiente c_1 ha un valore intorno a 0.41. Nel caso di correnti turbolente libere, invece, si
può assumere che $l = c\delta$, dove δ è lo spessore locale dello strato vorticoso ed il coefficiente c è compreso tra 0.4 ed 1.0.

A differenza di quelli algebrici,questo modello,grazie all'equazione di trasporto per l'energia
cinetica turbolenta media, è in grado di tenere conto della storia della corrente. Il risultato è che, pur
con un costo computazionale piuttosto modesto, si possono ottenere indicazioni relativamente
affidabili anche, ad esempio, in strati limite che si sviluppano o si rilassano.
D'altro lato, esiste ancora almeno una limitazione piuttosto pesante: non solo non esiste
(esattamente come nei modelli tipo mixing length) un'espressione di validità generale per la scala di
lunghezze l, ma non possono essere rappresentati nemmeno gli effetti di trasporto di tale scala, che
sono invece assai importanti in tutte le correnti separate.

7.4 MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K-ε)

Anche i modelli ad un'equazione (tutti ricavati secondo lo schema di calcolo esposto nei
precedenti capitoli per la convezione termica), pur presentando indubbi vantaggi rispetto ai modelli
algebrici del tipo mixing length soffrono di alcune limitazioni, la più gravosa delle quali consiste nel fatto
che i risultati dipendono ancora da una imposizione a priori della scala di lunghezza l.
Invece di prescrivere l a priori, così come K è ottenuta da un'equazione di trasporto, si può quindi utilizzare una seconda equazione di trasporto per la lunghezza l,oppure per una qualsiasi
variabile che sia correlata contemporaneamente, sia all'equazione per K, che è relativamente semplice
da trattare e che sembra dunque sensato continuare a risolvere, sia alla lunghezza l. In altri termini, si
tratta di definire finire una qualunque variabile del tipo $K^a l^b$, e di scriverne l'equazione esatta di
trasporto, mediante manipolazione delle equazioni di Navier e Stokes. E' evidente che l'equazione
risultante conterrà in ogni caso numerosi prodotti di grandezze turbolente che richiederanno, come nel
caso dell'equazione per K il ricorso alla modellazione. Tra le possibili variabili del tipo $K^a l^b$, sono
comunemente usate: K/l (frequenza turbolenta), K/l^2 (vorticità turbolenta) e $K^{3/2}/l$ (velocità di
dissipazione dell'energia cinetica turbolenta).
A titolo di esempio, vediamo come si può scrivere un'equazione di bilancio per la variabile velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica $\varepsilon = K^{3/2}/l$ una grandezza scalare che già compare

nell'equazione per K , e che consente di calcolare molto semplicemente l , una volta nota K , attraverso
il rapporto:

$$l = \frac{K^{3/2}}{\varepsilon} \quad [129]$$

La scelta di ε presenta, rispetto alle altre possibili, il vantaggio di non richiedere termini correttivi
in vicinanza di pareti,dal momento che K si annulla automaticamente all'annullarsi della velocità a
parete,mentre ε si mantiene finita. L'equazione per ε si può scrivere evidenziando, al solito, i termini di
produzione, diffusione e distruzione, che hanno le dimensioni di [$m^2 \cdot s^{-4}$], ovvero di una potenza per
unità di tempo e per unità di massa:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon + d_\varepsilon - distr_\varepsilon \quad [130]$$

Il trasporto di ε ,e cioè il trasporto di velocità di dissipazione, viene ovviamente calcolato in
modo esatto, mentre restano da modellare i termini di produzione di ε , P_ε , di diffusione d_ε e di
distruzione $distr_\varepsilon$, esattamente come avveniva per l'equazione di bilancio per K . Vediamo, in estrema
sintesi, come si possono modellare questi termini, e cioè esprimerli in funzione di grandezze medie.
In generale,la produzione di ε deve bilanciare la produzione di K e, al fine di evitare la crescita
illimitata di quest'ultima, si può assumere che:

$$P_\varepsilon \propto \frac{\varepsilon}{K} P_K \quad [131]$$

dove il fattore di proporzionalità par $\frac{K}{\varepsilon}$
è l'inverso di una scala di tempo, coerentemente con il fatto
che la produzione di ε è, di fatto, la velocità di distruzione di K .
Pertanto,introducendo il fattore di proporzionalità $c_{\varepsilon 1}$ e riprendendo il termine P_K dalla [131] si
scrive l'uguaglianza:

( )
2
1

$$P_\varepsilon = c_\varepsilon \nu_t \frac{\varepsilon}{K}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad [132]$$

Per la diffusione di ε , ancora in analogia con quanto si è fatto per la diffusione di K , si assume
che essa sia funzione delle viscosità molecolare e turbolenta e del gradiente di ε , secondo una relazione
del tipo:

$$d_\varepsilon \propto \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]$$

ν
ε
ε [133]

dove σ_ε è un coefficiente del tutto analogo al numero di Prandtl σ_K. Infine, il termine di distruzione di ε deve tendere all'infinito quando K tende a zero per evitare che K possa assumere valori negativi. Questo porta a scrivere:

ε ε
ε K
$distr \propto$ [134]

cioè, introducendo un ulteriore fattore di proporzionalità:

K
distr c
2
2
ε
ε ε =
[135]

L'equazione può quindi scriversi come:

( )
( )
K
c
x x x
u
K
c
Dt
D
j
t
j j
i
t
2
2
2
1
ε ε
σ
ν
ε ε ν ν
ε
ε
ε −
∂
∂

$+$
∂
$\partial +$
∂
∂
$=$ [136]

A questo punto, anche l'equazione di trasporto per ε può essere integrata insieme alle equazioni mediate di Reynolds e all'equazione di bilancio per K, ma richiede anch'essa condizioni iniziali e al contorno per ε , nonché di determinare i valori di alcuni parametri che compaiono nell'espressione dei termini a secondo membro.

Questi valori vengono definiti attraverso un processo di "calibrazione" del modello, a partire da quelli, relativi a quella che prende il nome di formulazione standard del modello K-ε , riportati nel seguito.

Assunzioni base: $\nu_t = K^{1/2}\, l$
$l = \dfrac{K^{3/2}}{\varepsilon}$

Viscosità cinematica turbolenta: $\nu_t = c_\mu \dfrac{K^2}{\varepsilon}$

Equazione per K: ( )
( )
l
K
C
y
K
$y\ y$
u
Dt
DK
D

K
t
t
2 3 2
−

∂
∂

+
∂
∂ +

∂
= ∂
σ
ν
ν ν
Equazione per e: ( )
( )
K
c
x x x
u
K
c
Dt
D
j
t
j j
i
t
2
2
2
1
ε ε
σ
ν
ε ε ν ν
ε

ε

$\varepsilon -$

∂

∂

$+$

∂

$\partial +$

∂

∂

$=$

Parametri: C_μ $C_{\varepsilon 1}$ $C_{\varepsilon 2}$ σ_K σ_ε

0.09 1.1256 1.92 1.0 1.3

I modelli del tipo K-ε rappresentano, almeno dal punto di vista concettuale, un indubbio miglioramento rispetto a quelli ad una sola equazione differenziale: la viscosità turbolenta viene finalmente calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, bensì entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia dellacorrente. Anche questi modelli, tuttavia, presentano ancora dei punti deboli: come tutti i modelli per le equazioni mediate di Reynolds, mancano di universalità, il che si traduce nella necessità di adattare caso per caso, le varie "costanti" del modello.

Inoltre, richiedono inevitabilmente distribuzioni iniziali e valori al contorno per K e per ε,che non è sempre facile assegnare in modo rigoroso. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi, quali la Large Eddy Simulation.

7.5 FONDAMENTI DELLA “LARGE EDDY SIMULATION (LES)”

L'approccio della Large Eddy Simulation (LES), ovvero della discretizzazione spaziale e temporale del moto medio e delle sole strutture turbolente di scala relativamente grande, si situa, sia per dettaglio dei risultati forniti, sia per impegno di risorse di calcolo, in una posizione intermedia fra la soluzione delle equazioni mediate di Reynolds e la soluzione diretta delle equazioni di Navier e Stokes.

L'esposizione rigorosa di questa tecnica richiede il ricorso ad integrali e a trasformate di Fourier delle variabili fluidodinamiche.

Tuttavia, se ci si limita ai soli aspetti fondamentali, è sufficiente richiamare alcuni concetti generali sulla turbolenza quali, ad esempio, la cascata energetica, le scale spazio-temporali ecc. In particolare, si deve ricordare che, all'interno dello spettro d'energia delle varie scale turbolente è possibile riconoscere la funzione energetica di strutture vorticose che possono essere approssimativamente raggruppate nelle tre bande dimensionali, o scale denominate, rispettivamente:

· - banda energetica (o energy-containing range), contenente le strutture vorticose turbolente di grande scala,

· - banda inerziale (inertial range o subrange), che comprende i vortici di dimensione media,

· -banda dissipativa (dissipation range), relativa alle strutture vorticose di piccola scala.

significato più chiaro ai termini "grande" e "piccolo", riferiti alle dimensioni dei vortici.

Su tali basi, possiamo infatti affermare che le strutture vorticose di scala maggiore(i grandi vortici):

· - hanno natura convettiva e numeri di Reynolds caratteristici relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte),

· - hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio,

· - hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente),

· - estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta,
· - hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Re della corrente media,
· - sono generalmente anisotrope.

Figura 69: Le tre bande caratteristiche dello spettro d'energia della turbolenza: scale energetiche, inerziali e dissipative

Le strutture turbolente di dimensioni intermedie:
· - sono generate dall'instabilit non lineare delle grandi strutture,
· - sono anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati,
· - hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;

I vortici pi piccoli:
· - nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi,
· - sono stabili, in quanto caratterizzati da numeri di Re bassi (dell'ordine dell'unit),
· - hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosit ,l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi,
· - hanno vita media molto pi breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale,
· - hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza, come si gi detto, una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio,
· - hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Re della corrente,
· - hanno una struttura pi universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

E' da queste considerazioni che nascono le idee fondamentali della Large Eddy Simulation, che possono essere riassunte in:

· 1) i vortici grandi e medi devono essere necessariamente (e quindi vengono) risolti esplicitamente, come in una DNS,
· 2) soltanto i vortici piccoli si prestano ad essere (e quindi vengono) modellati.

Mentre con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si costretti ad usare modelli che devono quindi simulare gli effetti della totalit dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente, e che pertanto non avranno mai il requisito dell'universalit, con la LES si pu sperare che, ricorrendo alla modellazione dei

soli vortici piccoli
(quelli grandi sono, infatti, risolti direttamente), questo possa essere al contempo non eccessivamente
complicato e sufficientemente universale, dal momento che pi universali sono le propriet dei vortici
che richiedono la modellazione.

Figura 70: Strato limite turbolento in Large Eddy Simulation

E anche l'isotropia, implicita nel concetto dello scalare viscosit turbolenta, pi ragionevolmente
ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala. La LES quindi, seppure meno accurata, per molto
meno costosa della DNS, soprattutto se i numeri di Reynolds in gioco sono elevati e, per quanto
concerne le informazioni pi significative, ovvero quelle relative al moto medio e alle strutture
convettive di grande scala, praticamente altrettanto affidabile, in quanto questi sono calcolati
esplicitamente.
Il processo di derivazione delle equazioni della LES, a partire da quelle di Navier- Stokes, par analogo a quello utilizzato nell'approccio delle equazioni mediate di Reynolds, salvo che, in questo caso,
sono completamente diversi il concetto e la definizione dell'operatore di media. Per le equazioni
mediate di Reynolds si eseguita un'operazione di media, o di filtraggio temporale delle variabili istantanee,
al fine di separare la parte discretizzata e risolta direttamente con le equazioni del moto medio, da quella
fluttuante, che veniva modellata.
Qui, al contrario, alle medesime variabili si applica un filtraggio spaziale, per separare la parte
spaziale discretizzata e risolta direttamente, dalla parte spaziale, che viene ancora modellata.
L'operazione di filtraggio pi intuitiva (sebbene non definibile in modo molto rigoroso dal punto
di vista matematico) quella implicitamente operata dal "volumetto di controllo", ovvero dal volume
racchiuso da ciascun elemento o cella della discretizzazione spaziale.

Nel caso della LES, si adottano dimensioni delle celle che non sono sufficientemente piccole da
permettere di descrivere in dettaglio la dinamica di tutte le strutture turbolente (altrimenti si ricadrebbe,
evidentemente, nei medesimi problemi della DNS) e, pertanto, le strutture di scala minore vengono
parzialmente o completamente filtrate dalla soluzione.
E, cos come avveniva per le fluttuazioni temporali nelle equazioni mediate di Reynolds, gli effetti
delle strutture spaziali non risolte vengono reintrodotti nel modello fisico-matematico attraverso relazioni
(o modelli) aggiuntivi. Nella LES, le equazioni per la quantit di moto (da integrarsi ovviamente a

sistema con l'equazione di continuit□, anch'essa filtrata) sono del tipo:

i j i
i
j
j
i
j i j
i
j
i u u f
x
u
x
u
x x
p
x
u
u
t
u +
□ □
□
□
□ □
□
□
− □
□
□
□
□ □
□
□
∂
+ ∂
∂
∂
∂
+ ∂
∂
= − ∂
∂
+ ∂
∂
∂ 1 ν
ρ

[137]

Equazione in cui, nel caso qui esaminato di fluidi a propriet□ uniformi e costanti, il termine
"viscoso" pu□ anche essere riscritto nella forma, del tutto equivalente, seguente:

j
i
i
j

j
i
$_j x$
u
x
u
x
u
x^2
2
∂
∂
$=$
∂
$+ \partial$
∂
∂
∂
$\partial\ \nu\ \nu$

Le [137], pertanto, sono formalmente identiche alle equazioni mediate di Reynolds, salvo che la barretta orizzontale qui indica la componente direttamente risolta, e cio residua dopo l'operazione di filtraggio spaziale, mentre l'apice indica la componente filtrata, non risolta, o "sottogriglia".

Nel caso della LES, tuttavia, il tensore di componenti $u'_i u'_j$, che ha il significato di "sforzo sottogriglia specifico", richiede evidentemente modelli diversi da quelli impiegati per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds.

Inoltre si deve ricordare che, mentre nelle equazioni mediate nel tempo, i termini contenenti le derivate temporali delle grandezze medie erano presenti soltanto nel caso di moto medio non stazionario, qui sono sempre presenti: infatti, anche se il moto medio stazionario, le strutture turbolente grandi e quelle intermedie, che devono essere risolte direttamente, sono, in ogni caso, non stazionarie.

E allo stesso modo, anche nel caso di correnti medie bidimensionali, le

equazioni della LES (al
contrario di quelle mediate di Reynolds) vanno sempre risolte in tre dimensioni,dal momento che non
esiste struttura turbolenta che non possieda la caratteristica della tridimensionalit□.

7.6 ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER

La simulazione del bruciatore in questione □ stata effettuata tramite il programma di calcolo ad
elementi finiti “FEMLAB□[23]”, prodotto e distribuito dalla software house svedese COMSOL□. Il
programma di calcolo possiede un “model navigator” dotato al suo interno di una serie di moduli
applicabili per analisi di vario tipo,dalla fluidodinamica alla meccanica strutturale.
All’interno di ognuno di questi sono a loro volta presenti dei sottomoduli contenenti gli algoritmi
di risoluzione delle equazioni differenziali tipiche del problema che s’intende analizzare.
Seguendo la logica di soluzione del programma di calcolo utilizzato, l’analisi e la modellazione del
problema affrontato sono state realizzate seguendo una successione di procedure, partendo dalla
realizzazione della geometria fino ad arrivare al plottaggio e al post-processamento dei risultati.
Le diverse fasi sono analizzate in dettaglio nei successivi paragrafi e costituiscono i passi necessari
per sviluppo di un generico modello di calcolo numerico, a prescindere dal software utilizzato.

[23] Il CAD FEMLAB□ ora prende il nome di COMSOL MULTIPHYSICS□

Figura 71: Finestra iniziale FEMLAB

7.6.1 COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA

Il primo passo inevitabile per la realizzazione del modello risiede nella costruzione della
geometria del sistema. In particolare ai fini del calcolo non □ stato necessario considerare il sistema per
la sua lunghezza effettiva, ma, ai fini di un pi□ scrupoloso utilizzo delle risorse di memoria, si □par analizzata la sezione finale del bruciatore pi□ o meno a ridosso della zona in cui □ presente lo swirler. Il
programma di calcolo □ dotato di un’interfaccia CAD per la costruzione delle geometrie.
Tuttavia questa si □ dimostrata inadeguata ai fini della realizzazione dello swirler il quale presenta
una geometria troppo complessa per essere eseguita con le primitive messe a disposizione dal software.
Per la costruzione della geometria completa si □ allora proceduto separatamente. Come prima
cosa □ stato modellato lo swirler, utilizzando un CAD adeguato (Solid Works□), la cui immagine □par riportata in Figura 72.

Figura 72: Modellazione geometrica dello swirler

Successivamente il file IGES[24] relativo allo swirler stato importato all'interno dell'interfaccia
grafica del software e su di esso stata completata la geometria complessiva.
Questa suddivisa in due zone: il primo tratto, sul quale stato inserito lo swirler, caratterizzato
da due cilindri concentrici che rappresentano il condotto del bruciatore entro cui fluisce il comburente.
Il secondo tratto, caratterizzato da un cilindro pieno, rappresenta un volume di controllo entro il
quale si pu analizzare il campo di moto del fluido in uscita dal bruciatore, e che simula una porzione
del reattore.
La geometria completa riportata in Figura 73.
Figura 73: Geometria completa del sistema studiato

7.6.2 EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTORNO

Il passo successivo alla costruzione del modello geometrico, stato scegliere il sistema di
equazioni differenziali che meglio approssima il comportamento del sistema nelle sue condizioni di
funzionamento,imponendo i giusti parametri sia per quanto riguarda il sottodominio sia per quanto
riguarda le condizioni al contorno.
In base alle rilevazioni sperimentali portate a termine sul bruciatore, le condizioni operative sono
risultate le seguenti:

· Il fluido,ovvero il comburente,entra dalla sezione iniziale con una velocit di circa 20 m/s,in
accordo con la portata di progetto;
· La densit del fluido stata approssimata ad un valore di circa 1 Kg/m^3, in funzione della
temperatura e di una media pesata effettuata sulle densit dei componenti facenti parte della
miscela gas-ossigeno(che caratterizza il comburente in esame);
· La viscosit cinematica stata fissata sul valore di $1*10^{-5}$ m^2/s in accordo con i valori tipici
riportati in letteratura;
· La pressione all'interno del volume di controllo, assimilabile ad una porzione del reattore, stata
fissata ad un valore di 3 bar.

[24] Il formato IGES riconosciuto da molti programmi come un formato standard per la modellizzazione solida.

Note le condizioni operative del sistema, sono stati calcolati due parametri adimensionali di
fondamentale importanza,allo scopo di determinare il regime di moto nel quale si trova il fluido, ovvero
il numero di Mach e il numero di Reynolds. Per il primo si ottenuto che:
0.04
s

$$Ma = \frac{w}{c} =$$

dove si ha che:

w=20 m/s è la velocità del fluido;

$c_s = \sqrt{kRT} = 480\,m/s$ è la velocità del suono;

e, considerando il comburente come un gas perfetto,ad una temperatura T=300°C si ha che:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \qquad R = 287\,kJ/kg \cdot K\ .$$

Per il secondo invece il valore ottenuto è il seguente:

$$Re = \frac{w \cdot (D_e - D_i)}{\nu} = 72000$$

Dall'analisi di questi due parametri si è arrivati alle seguenti conclusioni:

- -Per prima cosa, si è potuto, con buona approssimazione, considerare il fluido "incomprimibile" (ovvero si sono trascurate le variazioni di densità) essendo il numero di Mach molto minore dell'unità[25]. Questo è giustificabile osservando che le velocità in gioco nell'efflusso non sono particolarmente elevate.
- -In secondo luogo, dato il valore assunto dal numero di Reynolds, si capisce come il regime di moto sia sicuramente turbolento.
- -Infine il fluido in questione è considerato newtoniano, essendo una miscela gassosa; ciòpar comporta l'indipendenza della viscosità dal gradiente di velocità.

Figura 74: Finestra di selezione dei sottomoduli di risoluzione

[25] In realtà si parla di incomprimibilità quando Ma<0.3,condizione il che è ampiamente soddisfatta nel caso in esame.

Sotto queste condizioni, il modulo adottato per la risoluzione numerica del problema è il "modello a due equazioni differenziali k-ε", inserito all'interno del "Chemical Engeenering module".

Come già osservato nel capitolo quinto, il modello k-e è uno dei migliori per lo studio dei fenomeni che concernono la turbolenza. Le equazioni caratteristiche di questo approccio sono l'equazione di continuità e le equazioni di bilancio di quantità di

moto,inglobando in queste anche le
due equazioni ausiliarie sull’energia cinetica turbolenta “k” e sull’energia di dissipazione turbolenta
“e”,necessarie per la chiusura del problema:

( ) ( ) T
u∇u u = −∇p ρ + ∇· □□ ν +ν ∇u□□ + Fρ
−∇·u = 0
( ) i T
ij
j k
u
u k k
x
τ ε ν ν
σ
·∇ = ∂ − + ∇· □□□□ + □□∇ □□ ∂ □□ □ □
( ) 2
1 1 / i / T
ij
j
u
u c k c k
x ε ε
ε
ε ε τ ε ν ν ε
σ
·∇ = · ∂ − + ∇· □□□□ + □□∇ □□ ∂ □□ □ □

Individuato il modulo per lo studio si □ effettuato il settaggio del sottodominio,in accordo con i
valori derivanti dalle specifiche precedentemente elencate:
Figura 75: Finestra per il settaggio dei sottodomini
A seguire sono state impostate le condizioni al contorno(“boundary conditions”)per le quali il
software offre diverse tipologie (Figura 76).Per la fisica del problema affrontato le condizioni al
contorno imposte si possono riassumere come segue:

· Condizione di velocit□ assiale nella sezione d’ingresso,pari a 20 m/s;
· Condizione di aderenza(no slip) su tutte le superfici solide che costituiscono le pareti dei condotti
e le palette dello swirler;
· Condizione di pressione pari a 3 bar nella sezione finale del sistema.

7.6.3 LA MESH DEL MODELLO

Una volta stabilite tutte condizioni fisiche del modello, si □ potuto passare alla realizzazione della
mesh. Quest’ultima □ stata realizzata con elementi tetraedrici che meglio si adattano a casi di geometrie
3D,differentemente dalle mesh mappate con elementi quadrangolari.
Il problema esaminato,per via della sua geometria piuttosto complessa in prossimit□ dello swirler,
presenta un elevato numero di gradi di libert□ che hanno creato non pochi

problemi per la gestione
della memoria del calcolatore utilizzato.I valori impostati per la definizione degli elementi della mesh
sono riportati nella Figura 77.
Figura 76: Finestra per il settaggio delle condizioni al contorno
Figura 77: Finestra di settaggio per i parametri della mesh
Imponendo tali valori la mesh del modello risultata come riportato in Figura 78.
Da questa si pu osservare che la zona in cui presente lo swirler risulta molto pi densa di
elementi,essendo questa suddivisa in tanti piccoli sottodomini caratterizzati dai vani compresi tra le
palette. Ci si osserva meglio nell’ingrandimento riportato in Figura 79.

Tuttavia nonostante l’apparente bont della mesh, il numero delle maglie non quello ottimale
per ottenere risultati di precisione elevata,per i quali necessiterebbero mesh con milioni di gradi di
libert.
In ogni caso l’analisi risultata pienamente soddisfacente con il livello di approssimazione
considerato e ha restituito indicazioni importanti sulle distribuzioni del campo di velocit e di pressione
del sistema studiato.
Figura 78: Mesh del modello
Figura 79: Ingrandimento della mesh nella zona dello swirler

7.6.4 SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA
Questa fase rappresenta sicuramente il punto cruciale nella risoluzione del problema.Il software
utilizzato possiede di default una serie di solutori i quali possono essere opportunamente gestiti in
funzione dell’entit del calcolo e della tipologia di problema da risolvere. In breve i solutori possono
essere suddivisi come segue:
· Solutori lineari: per problemi semplici di carattere lineare;
· Solutori non lineari: per problemi complessi non lineari;
· Solutori diretti: ricavano la soluzione con metodo diretto ma con eccessivo utilizzo di memoria;
· Solutori iterativi: ricavano la soluzione in modo iterativo,sfruttando meno memoria,ma
impiegando pi tempo.
Normalmente per problemi come quello affrontato, in cui analizzano problemi di turbolenza con
geometrie 3D, il solutore che meglio si presta per la risoluzione sicuramente di tipo non lineare e
iterativo, da un lato perch le equazioni caratteristiche del moto sono non lineari, dall’altro perch il
solutore iterativo non presenta gli oneri di calcolo che presenterebbe un solutore diretto (soprattutto

nel caso di geometrie 3D).
Tuttavia a causa delle numerose iterazioni che questo tipo di solutore si trova ad eseguire per
risolvere il sistema di equazioni in questione, si optato, in definitiva, per un solutore non-lineare
diretto, che pur richiedendo notevole risorse di memoria ha consentito una maggiore rapidit di calcolo.
Com' riportato in Figura 80, l'analisi effettuata risulta essere "stazionaria non lineare" ed il
solutore prescelto risulta essere l'UMFPACK il quale stato settato limitando il fattore di smorzamento
per far convergere pi rapidamente la soluzione del problema:
Figura 80: Finestra di gestione del solutore
Infine, il "metodo di soluzione" delle equazioni differenziali alle derivate parziali(PDE) fissato sulla
modalit "generale", necessaria quando vengono affrontati problemi di natura non lineare, o semi-lineare.
7.6.5 PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO
Questa la fase finale del processo di modellazione la quale consiste nel plottare i risultati
ottenuti dalla simulazione e di effettuare il loro post-processamento.

Il software utilizzato ha, nel post-processamento dei risultati, uno dei suoi punti forti in quanto
presenta un'interfaccia di gestione semplice da utilizzare, ma allo stesso tempo completa.Il primo
risultato che stato plottato, riporta la distribuzione del modulo del campo di velocit,analizzato in una
serie di sezione trasversali del sistema ed rappresentato in Figura 81. Si evince chiaramente dalla figura
che il fluido entrando con una velocit di circa 20 m/s subisce un'accelerazione all'interno dello swirler
a causa della stazionariet del problema. Infatti, la conservazione della portata di massa comporta il
conseguente aumento della velocit al ridursi della sezione.
Figura 81: Piani di sezione: campo di velocitpar All'interno del reattore il fluido incontra un ambiente di grosse dimensioni espandendosi e
rallentando bruscamente fino a valori della velocit di 1 m/s circa. Il tutto appare pi chiaro nella
seguente sezione longitudinale:
Figura 82: Sezione longitudinale del modello

Dalla Figura 82 risulta evidente l'espansione del getto fluido(con andamento tipicamente
conico)al momento dell'ingresso nel reattore, con conseguente diminuzione di velocit.
Per quanto invece riguarda la direzione del campo di moto, si sono andati ad analizzare le linnee
di flusso[26] e i vettori velocit, come mostrato nelle seguenti immagini.
Figura 83: Linee di flusso

Figura 84: Vettori velocit□par Risulta in questo caso ben visibile il moto a spirale tipico di un flusso swirlato.In particolare il moto impresso dalla palettatura crea,come accennato nel capitolo precedente,una zona di depressione interna con conseguente sviluppo di una zona di ricircolo centrale (“Central Toroidal Ricirculation Zone”) che riporta il fluido verso la sezione d’uscita del bruciatore.

[26] Si ricorda che per linea di flusso (streamline) s’intende la linea che si mantiene tangente in ogni punto al vettore velocit□.

Figura 85a: Ingrandimento della zona di formazione del vortice(posteriore)

Figura 85b: Ingrandimento della zona di formazione del vortice(anteriore)

Eseguendo in prossimit□ di quest’ultima (ad una distanza di circa 1 cm) un’analisi della distribuzione radiale della componente assiale della velocit□, □ possibile osservare su un generico piano longitudinale della geometria, un andamento del tipo riportato in Figura 86.

E’ facile osservare come nella zona centrale,ovvero all’interno del nucleo del vortice,il modulo della velocit□ assiale assuma valori negativi. Ci□, ovviamente, □ collegato all’inversione del flusso causata dai gradienti pressori che si originano in suddetta zona.

I valori trovati sono aderenti ai risultati ottenuti per via sperimentale, tramite LDV e concordano con i numerosi casi analoghi ritrovabili in letteratura. I valori inerenti all’effetto di ricircolo ottenuti con la simulazione inoltre risultano concordanti con il grado di swirl posseduto dal bruciatore.

Figura 86: Distribuzione radiale della componente assiale della velocit□ all’uscita del bruciatore

Si □, calcolato il numero di swirl per il sistema in esamem basata sulla geometria del sistema, ottenendo che:

$$S = \frac{2}{3}\frac{1-\left(R_h/R\right)^3}{1-\left(R_h/R\right)^2}\tan\alpha = 0.77$$

□ − □
= □ □ =
□□ − □□
Secondo la suddivisione effettuata nel sesto capitolo in merito ai diversi gradi di effetto swirl, si
osserva che il sistema esaminato rientra nel caso di un “medium swirl”, essendo il numero di swirl
compreso tra 0 ed 1.
In questa categoria, infatti, rientrano tutti i sistemi in cui l’effetto □ tale da generare un gradiente
di pressione assiale e radiale sufficientemente intenso da formare vortici di rientro in cui viene
ricircolata una certa percentuale di massa fluida. Ci□, quindi, corrisponde perfettamente a quanto
ottenuto dalla simulazione.
La stessa analisi □ stata successivamente effettuata a distanze crescenti rispetto alla sezione
d’uscita del bruciatore per analizzare la permanenza □ la lunghezza della zona di ricircolo.
Come riportato in Figura 87 ad una distanza di circa 20 cm dalla bocca del bruciatore si ha ancora
un notevole effetto di ricircolo evidenziato dai valori assunti dalla componente assiali della velocit□,i
quali permangono negativi.
Questo denota un elevato grado di miscelazione tra comburente e combustibile, il quale viene, in
una buona percentuale, ricircolato dai vortici toroidali del comburente verso la zona d’iniezione,dando
origine a tutti gli effetti benefici che sono gi□ stati pi□ volte sottolineati riguardo le emissioni e la
stabilit□ di fiamma.

Figura 87: Distribuzione radiale della componente assiale della velocit□ a 20 cm dalla sezione d’uscita del
bruciatore
In maniera analoga □ stato possibile analizzare la distribuzione radiale di pressione sempre in
prossimit□ della sezione d’uscita, il cui andamento □ riportato in Figura 88.
Figura 88: Distribuzione della pressione all’uscita del bruciatore
La figura □ esplicativa del fatto che, pur essendo fondamentalmente tutto l’ambiente alla
pressione di progetto di 3 bar, all’uscita del bruciatore si viene a creare quella leggera depressione tipica
dei flussi swirlati.
La leggera discontinuit□ che si pu□ notare nell’immagine, nella zona centrale, deriva
dall’imprecisione di calcolo implicita nella mesh prescelta che,come gi□ osservato,comporta degli errori
durante l’analisi numerica.

8 EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI

I fluidi (liquidi e vapori) possono cambiare di stato, come si □ visto in Termodinamica Applicata con le curve di Andrews. Questi cambiamenti di stato, ebollizione e condensazione, rivestono una grandissima importanza industriale per le numerosissime ed importantissime applicazioni in campo energetico. Si pensi, ad esempio, al raffreddamento dei reattori nucleari, ai tubi di calori e alle applicazioni in campo elettronico (raffreddamento di componenti fortemente energetici).

Oggi con queste tecniche si riesce a raggiungere una intensit□ di flusso estratto dell’ordine del MW/m□ e quindi valori elevatissimi e adatti a far fronte alle esigenze di raffreddamento di dispositivi ad elevata densit□ di potenza[27]. Si vuole in questo capitolo presentare brevemente queste problematiche affrontandole pi□ in modo qualitativo che quantitativo, anche in considerazione della natura del presente Corso. Si rimanda ai testi specializzati ogni ulteriore approfondimento.

Un altro motivo di interesse specifico di questi fenomeni di scambio termico con passaggio di stato □ dovuto alla semplice considerazione che per essi non si possono applicare le relazioni adimensionali della convezione termica viste in precedenza. Si osservi, infatti, che per la convezione forzata si hanno relazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot \mathrm{Re}^m \cdot \mathrm{Pr}^n$$

mentre per la convezione naturale si hanno correlazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot \mathrm{Gr}^m \cdot \mathrm{Pr}^n$$

che spesso, nel caso di gas per i quali gli esponenti m ed n sono eguali, si possono ricondurre nella forma semplificata:

$$Nu = C \cdot \mathrm{Ra}^m$$

Si ricorda che il numero di Prandtl □ definito dal rapporto:

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

e quindi dipende dal calore specifico a pressione costante del fluido interessato. Durante i passaggi di stato la pressione si mantiene costante ma anche la temperatura e quindi c_p □ infinito. Ne segue che durante i passaggi di stato non possiamo usare correlazioni adimensionali ove compare c_p.

Occorre, quindi, affrontare diversamente il problema dello scambio termico in cambiamento di fase con osservazioni e metodologie di studio specifiche per questi fenomeni.

8.1 EBOLLIZIONE STATICA

Prima di affrontare lo studio dell’ebollizione □ bene ricordare che questa differisce dalla

evaporazione. Questa, infatti, un fenomeno di transizione dalla fase liquida a quella di vapore nella
regione superficiale di contatto dei due fluidi ed determinata dalla differenza fra la pressione di
saturazione e la pressione parziale del vapore. L’ebollizione interessa, invece, la massa del fluido ed par determinata dal raggiungimento della temperatura di saturazione nel punto specifico e alle condizioni di
pressione presenti. L’ebollizione stata studiata negli anni quaranta da Nukijama che propose il
diagramma di Figura 89 per ebollizione statica: in ascisse rappresentato ΔT_{sat} cio la differenza di
temperatura della parete, T_p, e quella di saturazione del liquido, T_s, in ordinate si ha il flusso specifico
[W/m] in unit arbitrarie.

[27] I reattori nucleari raggiungono densit di potenza dell’ordine di qualche centinaio di Watt per centimetro cubo.
Dello stesso ordine di grandezza sono le densit di potenza dei tubi claystron utilizzati negli impianti radar. Si pensi, ancora,
che un semplice Pentium III disperde circa 40 W con una superficie di circa 2 cm e quindi con una densit superficiale di
0.2 MW/m. E’ opportuno osservare che oltre al valore assoluto della potenza termica da estrarre (ad esempio negli impianti
di potenza) importante considerare anche le densit (volumiche o superficiali). Se non si riesce a smaltire queste potenze
specifiche i dispositivi interessati possono subire danni irreversibili o non funzionare affatto.

q
Δ Tsat
ONB
B
C
L
D
Convezione
naturale
Ebollizione
Nucleata
Ebollizione
per f il parziale
Punto di Leidenf rost
Ebollizione
per f ilm
10 200 400 4000

Figura 89: Curva di Nukijama

L’ebollizione statica si ha, ad esempio, ponendo la classica pentola sul fuoco: il fluido in
condizioni statiche e non in movimento, come avviene nei tubi all’interno di una caldaia.
Se si aumenta la potenza ceduta alla parete di fondo si hanno, inizialmente, valori di ΔT_{sat} bassi,
dell’ordine di qualche grado, come indicato in figura.
Per effetto di questa differenza di temperatura si instaurano fenomeni convettivi per i quali il

fluido caldo, a contatto con la parete di fondo riscaldata, si sposta verso l’alto,
ove la temperatura □par inferiore a quella di saturazione dando luogo alla
convezione termica, cos□ come vista in precedenza. In
questa zona si possono utilizzare le correlazioni adimensionali solite per la
convezione naturale e il
flusso specifico □ dato da[28]:

$q = h\Delta T_{sat}$

Molto usata □ la correlazione di Mc Adams: $(\ )_{0.25}\ Nu = 0.56\ Gr\ \mathrm{Pr}$ per moto laminare
e

$(\ )_{0.33}\ Nu = 0.13\ Gr\ \mathrm{Pr}$ per moto turbolento.

Ad un certo punto, a seconda della combinazione di fluido e materiale delle
pareti e della
pressione sul fluido, si cominciano ad osservare sulla parete di fondo riscaldata
alcune bollicine che
appena nate subito spariscono.
Per comprendere questo fenomeno occorre ricordare che l’ebollizione del
liquido avviene solo
quando si supera la temperatura di saturazione e per effetto di una causa
scatenante, una sorta di
innesco spesso dato dalla presenza di impurezze, di gas diverso dal vapore o
da asperit□ tipiche delle
lavorazioni delle pareti metalliche.
In Figura 90 si ha un ingrandimento della parete di fondo con l’evidenziazione
delle asperit□par dovute alle lavorazioni. Si osservi che queste asperit□ sono
volute, come si dir□ fra poco, perch□ aiutano
il processo di formazione delle bolle.

[28] Si utilizza il salto di temperatura ΔT_{sat} come valore di riferimento certo. Il salto
reale di temperatura dipende dalle
condizioni locali non sempre facilmente calcolabili.

Δ

Figura 90: Nascita di una bolla di vapore

Se consideriamo una cavit□ si intuisce che nella cuspide di fondo si ha una
concentrazione
anomala di potenza termica (a parit□ di superficie frontale le pareti inclinate
trasmettono pi□ calore) e
quindi □ possibile avere l’innesco per l’inizio della ebollizione.
Il vapore che si viene formando occupa un grande volume e forma una bollicina
che va sempre
pi□ crescendo di diametro fino ad uscire fuori dai limiti della stessa cavit□ e
affiorare nel liquido
sovrastante. Il liquido pu□ essere ancora in condizioni di sottoraffreddamento,
cio□ ancora non
sufficientemente riscaldato e quindi in condizioni tali da mantenere le
condizioni termodinamiche di
esistenza in vita della bolla.

Δ

Figura 91: Implosione della bolla

Pertanto la bolla si raffredda rapidamente perch□ cede calore al fluido
sovrastante e, quando la
pressione interna diviene inferiore a quella esercitata dal liquido esterno si ha

l’implosione con
conseguente scoppio, vedi Figura 91 e Figura 92.
Questo semplice meccanismo si rivela efficacissimo ai fini dello scambio termico poich il vapore
all’interno della bolla cede al liquido il suo calore latente di vaporizzazione (che elevato!). Inoltre lo
scoppio produce l’effetto benefico di movimentare il liquido ossia di migliorare la convezione termica.
E’ come se si avessero tanti piccoli meccanismi di movimentazione del liquido e quindi la convezione si
comporta come se fosse forzata.
Quanto sopra detto si chiama ebollizione enucleata e tale il nome proprio dalla formazione dei
nuclei di ebollizione che poi implodono. La temperatura corrispondente all’insorgere di questo
fenomeno detta onset on nucleate boiling (ONB) e rappresenta un punto significativo della curva
di Nukijama.

Δ

Figura 92: Scoppio della bolla

Per effetto dei meccanismi efficacissimi di scambio termico ora il flusso termico si esprime con la
relazione:

$$q = h\Delta T_{sat}^{3 \div 5}$$

Si osservi che ora il flusso termico dipende dalla 3÷5 potenza del ΔT_{sat} e quindi si ha una capacitpar di estrazione termica notevolissima. E’ proprio questa la zona di maggiore interesse per le applicazioni.:
l’ebollizione nucleata.

Δ

Figura 93: Distacco delle bolle

Man mano che il liquido si riscalda le bolle possono crescere ulteriormente e finalmente possono
staccarsi dalla parete di fondo, come indicato in Figura 93. Le bolle ora perfettamente formate sono in
grado di iniziare la loro ascesa verso la superficie superiore del liquido ma, allontanandosi dalla parete,
incontrano strati di liquido pi freddi e quindi si raffreddano cedendo calore attraverso la superficie di
separazione.

pv
pl
σ
Vapore
Liquido
Tv Tl

Figura 94: Equilibrio termodinamico della bolla

Quando la pressione interna della bolla non riesce pi a bilanciare la pressione del liquido si ha, ancora, l'implosione della bolla e quindi nuovamente il meccanismo di scambio termico visto in precedenza con la cessione del calore latente e la movimentazione del liquido.

Con riferimento alla Figura 94 si può scrivere, per l'equilibrio:

$$p_v \pi \frac{d^2}{4} = p_l \pi \frac{d^2}{4} + \pi d \sigma$$

ove si sono indicate con:

- p_v la pressione del vapore interna alla bolla alla temperatura T_v;
- p_l la pressione esercitata dal liquido alla pressione T_l;
- d il diametro della bolla;
- σ la tensione superficiale della bolla,

Da questa relazione si ha:

$$p_v - p_l = \frac{4\sigma}{d}$$

Si può subito osservare che più piccolo è il diametro della bolla tanto maggiore deve essere la differenza di pressione fra l'interno (vapore) e l'esterno (liquido).

Inoltre se si vuole che il liquido e il vapore della bolla sia in equilibrio termodinamico deve essere $T_v = T_l$ e poiché il vapore è in condizioni di saturazione alla pressione $p_v > p_l$ deve anche aversi che il liquido, essendo ad una temperatura superiore a quella di equilibrio alla pressione $p_l < p_v$, è par surriscaldato.

Allora il surriscaldamento $T_v - T_s$ in condizioni di equilibrio termico e meccanico può essere determinato facendo ricorso all'equazione di Clapeyron – Clausius (che possiamo ricavare dalle equazioni di Maxwell viste in Termodinamica):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$$

che, nel caso in esame diviene:

$$\frac{dp}{dT} \cong \frac{r}{vT} = \frac{r p_v}{R_v T_s^2}$$

ove si è tenuto conto che deve essere $p_v v = R_v T_s$. Possiamo ancora scrivere, in prima approssimazione:

$$\frac{dp}{dT} \approx \frac{p_v - p_l}{T_v - T_s}$$

e quindi, anche in considerazione di quanto sopra visto per $p_v - p_l$ si ha:

$$T_v - T_s = t_v - t_s = \frac{4\sigma R_v T_s^2}{r p_v d}$$

Ora l'ebollizione nucleata non è più sul nascere ma in pieno sviluppo e siamo nel tratto di curva AB della Figura 89.

Gli scambi termici sono efficaci e il liquido subisce un vigoroso riscaldamento.

Quando il ΔT_{sat} raggiunge il punto B allora si cominciano ad avere le prime bolle che raggiungono la superficie del liquido e quindi tutta la massa del liquido è interessata dal fenomeno della enucleazione.

Dal punto B in poi, al crescere di ΔT_{sat} si formano sempre più bolle di vapore che raggiungono la superficie del liquido, fino a formare vere e proprie colonne di vapore che occupano uno spazio non trascurabile[29].

Il liquido in moto convettivo dall'alto verso il basso, per continuità di massa, trova sempre meno spazio per passare e quindi aumenta la sua velocità di spostamento e ciò favorisce lo scambio termico.

Se non si fosse in equilibrio termico allora per $T_v < T_l$ si avrebbe:

$$T_l - T_s > \frac{4\sigma R_v T_s^2}{r p_l d}$$

Il calore si scambia per conduzione all'interfaccio liquido – vapore e parte del liquido evapora e la bolla cresce. Se invece $T_v > T_l$ ovvero per :

$$T_l - T_s < \frac{4\sigma R_v T_s^2}{r p_l d}$$

lo scambio termico si inverte e la bolla diminuisce di volume.

Ritorniamo alla curva di Nukijama osservando che quando ΔT_{sat} raggiunge il punto C di Figura 89 allora tutta la massa del liquido si è portata nelle condizioni di saturazione e può partecipare massivamente all'ebollizione.

Il punto C è particolarmente importante nello studio che si sta facendo: esso prende il nome di punto critico e il flusso termico corrispondente è detto flusso di burn out (cioè di bruciatura). A

destra del punto critico non facile andare se si controlla il flusso termico, come sin qui si fatto. La
curva di Nukijama monocroma se si controlla il ΔT_{sat} mentre policroma se si controlla il flusso
termico q.
Δ
Figura 95: Implosione della bolla distaccata
Dal punto critico C con un leggero incremento della temperatura di parete si passa al punto D a
cui corrisponde (si veda in ascisse) un valore elevatissimo e tale da portare a fusione la maggior parte
dei materiali oggi utilizzati.
Pertanto le condizioni operative debbono essere lontane il pi possibile da C per evitare la
bruciatura della parete di fondo a cui seguono scoppi ed incidenti vari.
Se anzich controllare il flusso termico si potesse controllare ΔT_{sat} ad esempio mediante scambi
termici con corpi in cambiamento di fase (la cui temperatura, quindi, costante durante il cambio di
fase e nota per data pressione) allora si pu andare a destra di C, con grande cautela.
[29] Si ricordi che il vapore ha un volume specifico molto grande rispetto al liquido, almeno per pressioni lontane da
quella critica.

Δ
Figura 96: Formazione di colonne di bolle
Adesso la produzione di vapore massiva e le colonne di vapore sono talmente numerose da
toccarsi fra loro, specialmente in corrispondenza della parete di fondo. Si ha, pertanto, la situazione di
Figura 97 ove si ha la formazione di uno strato di vapore continuo nel fondo.
Il liquido, per effetto delle velocit raggiunte a causa del restringimento delle sezioni di passaggio,
riesce a squarciare questo velo di vapore e quindi a bagnare ancora, seppure parzialmente la parete di
fondo.
Δ
Figura 97: Formazione di uno strato di vapore sulla parete di fondo
L'alternarsi dello strato di vapore e dello strato di liquido giustifica la necessit di abbassare il
flusso termico, come mostrato in Figura 89.
Si osservi, infatti, che la trasmissione attraverso il liquido sempre pi efficiente rispetto a quella
con vapore e quindi la trasmittanza termica con liquido maggiore di quella con vapore. Pertanto si ha:

$$K_{liquido} S\Delta T_{sat} > K_{vapore} S\Delta T_{sat}$$

e quindi a parit di S e di flusso termico imposta si ha un ΔT_{sat} maggiore nel caso di presenza del
vapore.
Dal punto C ci si sposta, diminuendo il flusso termico, fino al punto L detto punto di

Leidenfrost o di calefazione in corrispondenza del quale lo strato di vapore prende definitivamente il sopravvento rispetto al liquido che, pertanto, non riesce più a squarciare il velo di vapore.
In pratica il liquido galleggia su uno strato di vapore stabile sulla parete di fondo.

Questa situazione è facilmente riproducibile: se si gettano goccioline di acqua su una piastra di ferro infuocata si può osservare una sorta di galleggiamento delle goccioline sulla stessa piastra, fino a quando tutto il liquido diventa vapore.
Si ha in L una situazione di scambio termico con K_{vapore} e quindi con ΔT_{sat} elevati, come si vede dalla curva di Nukijama.
Ora però la situazione è stabile e quindi il flusso può nuovamente crescere al crescere di ΔT_{sat}. In Figura 98 si ha una sequenza fotografica della nascita di una bolla e del suo collasso in fase iniziale (ebollizione nucleata).
Si può osservare come l'implosione della bolla provochi un micro moto convettivo locale che incrementa fortemente lo scambio liquido – vapore.
E' questa una delle motivazioni forti della grande efficacia di scambio termico in questa tipologia di ebollizione.
In Figura 99 si ha una analoga sequenza di immagini dell'implosione di una bolla non più in fase nucleata ma del tutto sviluppata.

8.2 CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE

Le correlazioni di scambio termico si basano su esperienze di laboratorio in varie situazioni pratiche (cioè accoppiamento di liquidi e metalli vari). Si definisce un numero di Reynolds di bolla dato dalla relazione:

$$\mathrm{Re}_b = \frac{\dot{m}_v D_b}{\mu_l}$$

ove con $\dot{m}_v$ si è indicata la portata di vapore per unità di superficie, D_b il diametro della bolla al momento del distacco, μ_l la viscosità del liquido.
La correlazione di scambio sperimentale (Zuber) è la seguente:

$$\left(\frac{c_{l}\,\Delta T_{sat}}{r\,\mathrm{Pr}_l^{s}\,C_{sf}} \right)^3 \quad g \quad q \quad \mu_l \quad r \quad \rho_l \quad \rho_v$$

r C
ρ ρ
μ
σ
− □ Δ □
= □□ □□
□ □

ove r □ il calore latente di vaporizzazione, ρ_l e ρ_v sono le densit□ del liquido e del vapore, Pr_l □ il
numero di Prandtl del solo liquido saturo, s e C_{sf} opportuni coefficienti dati dalle varie combinazioni di
liquidi e materiali e σ □ la tensione superficiale dell’interfaccia liquido - vapore.
Il flusso termico massimo, cio□ il flusso critico, pu□ essere calcolato con la relazione:

( ) 1/ 4
2 0.18 l v l
critico v
v l v
g
q r
ρ ρ ρ σ ρ
ρ ρ ρ
□ − □ □ □
= □ □ □ □ □ □ □ − □
.

8.3 EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO

Consideriamo adesso il caso che l’ebollizione avvenga con liquido in movimento all’interno di un
condotto, come raffigurato in Figura 101.
Il flusso termico □ ceduto lungo la superficie laterale del condotto (si immagini un tubo bollitore
all’interno di una caldaia).
Il liquido entra nel condotto in condizioni di sottosaturazione.
Man mano che procede verso l’alto il liquido si riscalda fino a quando, con le stesse modalit□ viste
in precedenza per l’ebollizione statica, si formano le prime bolle di vapore (ONB) sottoraffreddate e
poi, ancora procedendo verso l’alto, si formano delle vere e proprie bollicine che si liberano nella
matrice liquida.

Figura 98: Sequenza di ebollizione nucleata statica attorno ad un filo caldo

Figura 99: Sequenza delle fasi di implosione di una bolla completa

Figura 100: Curva di Nukijama per ebollizione dinamica (α □ il coefficiente di convezione)

Figura 101: Ebollizione dinamica

Si ha, quindi, il moto a bolle di Figura 101. All’aumentare del flusso termico ricevuto si hanno sempre più bollicine che finiscono con il toccarsi formando bolle di dimensioni maggiori, dei veri e propri tappi di vapore e si ha il moto a tappi.

Procedendo ancora verso l'alto il vapore che si forma diviene massivo e tale da formare uno strato anulare interno al condotto, con pareti ancora bagnate dal liquido, moto anulare. Ad un certo punto il liquido alle pareti viene sostituito dal vapore e si ha un punto di crisi termica analogo al punto di burn out visto in precedenza.

Adesso si dice punto di dry out e cioè punto di asciugatura. Anche in questo caso se il vapore bagna le pareti il ΔT_{sat} cresce molto ed improvvisamente. In questo caso si hanno valori del salto di ΔT_{sat} inferiori a quelli in ebollizione statica e i tubi normalmente usati possono resistere benissimo.

Figura 102: Distribuzione di temperatura lungo un tubo bollitore

Oltre il punto di dry out si ha un moto nel quale goccioline residue di liquido galleggiano in una matrice di vapore. Si ha il moto a nebbia utilizzato in alcune applicazioni impiantistiche.

L'andamento del tipo di moto unitamente alla distribuzione della temperatura lungo il tubo bollitore sono riportati in Figura 102. E' opportuno osservare che il tipo di moto sopra indicato non avviene sempre allo stesso moto in qualunque situazione sperimentale.

Ad esempio, per tubi orizzontali si hanno configurazioni di moto diverse con moto stratificato anziché anulare. Inoltre si possono avere anche unioni di masse liquide per formare una specie di tappi (moto a slug) che non ha corrispondenza nel moto verticale.

Per conoscere il tipo di flusso che si viene ad instaurare in un condotto non si hanno metodi certi per cui si utilizzano mappe sperimentali non sempre affidabili data la grande variabilità dei parametri.

Figura 103: Tipo di moto in un tubo bollitore orizzontale

In Figura 104 si ha un tipico diagramma detto a zone per individuare, con approssimazione non sempre accettabile, il tipo di moto che si può instaurare in un tubo bollitore orizzontale.

Figura 104: Diagramma a zone per il tipo di moto

Nel caso di ebollizione dinamica si hanno vari metodi per calcolare il coefficiente di convezione termica che portano a forme analitiche del tipo:

( ) b

$q = af p \Delta T_{sat}$
con a e b costanti sperimentali opportune.
Chen consiglia di usare un coefficiente di convezione termica dato dalla somma di una componente dovuta alla convezione microscopica ed una convezione macroscopica.
Quest’ultima si può determinare mediante la relazione di Dittus – Boelter modificata:

$$h_{eb.mac} = 0.023 Re_b^{0.8} Pr_l^{0.4} \frac{\lambda_l}{D_H}$$

ove Re_b è il numero di Reynolds corrispondente al deflusso bifase dato dalla relazione:

$$Re_b = Re_l \cdot F$$

con F fattore correttivo empirico funzione del parametro di Martinelli, X_{tt}, definito come radice quadrata del rapporto fra la caduta di pressione nella fase liquida e la caduta di pressione nella fase aeriforme ed è dato a sua volta dalla relazione:

$$X_{tt} = \sqrt{\frac{\Delta p_l}{\Delta p_a}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0.9} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{0.5} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v}\right)^{0.1}$$

con x titolo del vapore.
Figura 105: fattore di correzione F
Il coefficiente di convezione microscopica è fornito dalla relazione:

$$h_{eb.mic} = 0.000122 \frac{\lambda_l^{0.79} c_{pl}^{0.45} \rho_l^{0.49}}{\sigma^{0.5} \mu_l^{0.29} r^{0.24} \rho_v^{0.24}} \Delta T_{sat}^{0.24} \Delta p^{0.75} S$$

con S fattore correttivo funzione di Re_b. Il flusso termico critico è dato da:

$$0.5 \quad 0.15 \quad 0.2 \quad 1400 \quad critico \quad m \quad A \quad q \quad l \quad d$$

d

□ □

□ □

= □ □

□ □

□ □

□ □

J

valida per acqua e con pressioni fino a 7 bar.

Figura 106: Fattore di correzione S

8.4 LA CONDENSAZIONE

Il processo inverso dell’ebollizione è la condensazione che può avvenire sia a gocce che per film. Il primo tipo (a gocce) è molto efficiente e rappresenta l’analogo dell’ebollizione nucleata.
Sfortunatamente perché questa avvenga occorre avere superfici di condensazione non bagnabili in modo che le goccioline di condensato restino isolate. Ciò si raggiunge spalmando le superfici con speciali additivi chimici o ricoprendole di lamine d’oro e di materiale plastico.
L’uso continuo porta comunque ad un decadimento delle proprietà superficiali e quindi alla necessità di rinnovamento delle superfici stesse. Con la condensazione a gocce si può arrivare a coefficienti di convezione fino ad 1 MW/m²K. Più facile da avere e controllare è la condensazione a film nella quale si ha un processo di condensazione massivo (analogo dell’ebollizione di massa) con formazione di un film di condensato che scorre lungo la parete fredda, come indicato in Figura 107.
Il problema della condensazione è stato studiato da Nusselt ad inizio del novecento e la sua teoria, pur se semplificata, rimane ancora oggi valida. Nusselt suppone che il condensato si muova in regime stazionario con moto laminare lungo la parete e che il profilo del film di condensato sia liscio, cioè non si formino onde o corrugazioni.
Le equazioni della quantità di moto si riducono alla sola equazione in y e cioè:

$$\rho_l\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{dP}{dy}+\mu_l\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\rho_l g$$

FILM DI
CONDENSATO
PARETE
FREDDA
GRAVITA'

y
x

Figura 107: Formazione del film di condensato

L’ultimo termine rappresenta l’azione della gravità sull’elemento di volume di condensato. Il film di liquido si suppone sottile e in tale ipotesi il gradiente di pressione nel liquido risulta eguale (per la seconda equazione della conservazione della quantità di moto) a quello nel vapore, cioè si ha:

$$\frac{dP}{dy} = \rho_v g$$

La prima equazione della quantità di moto può essere riscritta, per effetto della precedente osservazione, in altro modo:

$$\underbrace{\rho_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{Inerzia} = \underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{Attrito} + \underbrace{\left(\rho_l - \rho_v \right) g}_{Alleggerimento}$$

In questa relazione sono evidenziate le forze in gioco e il loro bilanciamento. Assumiamo, ancora, che le forze di inerzia siano trascurabili (per lo strato sottile) rispetto alle forze di attrito e quindi si può par scrivere ancora:

$$\underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{Attrito} + \underbrace{\left(\rho_l - \rho_v \right) g}_{Alleggerimento} = 0$$

Questa equazione del secondo ordine va integrata due volte in x con le condizioni al contorno:

- v=0 per x=0 , cioè scorrimento nullo alla parete;
- $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ per x=δ , cioè taglio nullo all’interfaccia liquido-vapore, avendo indicato con δ lo spessore corrente del film liquido ad ordinata y;

Si ottiene allora la seguente distribuzione di velocità:

$$v(x) = \frac{(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^2}{\mu_l}\left[\frac{x}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

In questa relazione non è ancora noto lo spessore δ del film di condensato. Nota la velocità del condensato si può calcolare la sua portata che vale:

$$\dot{m} = \int_0^\delta \rho_l\, u\, dx = \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)\, g\, \delta^3}{3\mu_l}$$

La portata di liquido condensato è qui misurata in [kg/(ms)] ed è espressa per unità di lunghezza nella direzione normale al piano di Figura 107. Il vapore che va condensando cede il suo calore latente di condensazione e il calore sensibile di desurriscaldamento, supponendo che la temperatura di parete sia inferiore alla temperatura di saturazione del vapore alla pressione in cui esso si trova.

$$\dot{m}\, h'_{lv} = \int_0^\delta \rho_l\, v \left[h_{lv} + c_{p,l}\left(T_{sat} - T\right)\right] dx$$

ove si è considerata l'entalpia del fluido saturo h_f e non quella del liquido sottoraffreddato (perché a contatto con la parete fredda, $T_p < T_{sat}$). Nusselt suppose (e quest'ipotesi è ancora oggi valida) che la temperatura locale T sia distribuita linearmente lungo lo spessore del film di condensato e cioè si abbia:

$$\frac{T - T_{sat}}{T_p - T_{sat}} \approx 1 - \frac{x}{\delta}$$

per cui integrando la precedente relazione dell'entalpia totale di condensazione si ottiene:

$$h'_{lv} = h_{lv} + \frac{3}{8}\, c_{p,l}\left(T_{sat} - T_p\right)$$

f p l sat p l
h
h h c T T m
□ □ = □□ − − □□
⌋

La quantit□ in parentesi quadra □ l’entalpia totale del liquido condensato. L’entalpia ricevuta dal
liquido viene, a regime, trasmessa verso la parete per conduzione termica e quindi deve essere:

" sat p
p l
T T
q λ
δ
−
=

ove λ_l □ il coefficiente di conducibilit□ termica del liquido condensato. A regime si deve avere che
il flusso di condensazione per una lunghezza dx deve eguagliare quello di conduzione e quindi:

( ) ,
3
8
sat p
f p l sat p l l
T T
h c T T dm λ dx
δ
□ □ − □□ − − □□ =
⌋

Combinando questa relazione con quella della portata di condensato si ottiene:

( )
( )
3
'
l l sat p
lv l v
v T T
dy d
h g
λ
δ δ
ρ ρ
−
=
−

Integrando e ricordando che per y=0 □ δ=0 si ha:

( ) ( )
( )

1/ 4
4
'
l l sat p
lv l v
v T T
y x
h g
λ
δ
ρ ρ
□ − □
= □ □
□□ − □□

Pertanto lo spessore del condensato cresce con x.

Il coefficiente di convezione termica può adesso essere calcolato dalla relazione:

( )
( )
1/ 4
3 " '
4
p l l lv l v
y
sat p l sat p
q h g
h
T T yv T T
λ λ ρ ρ
δ
□ − □
= = = □ □
− □□ − □□

Integrando su tutta la lunghezza della parete si ottiene il coefficiente di convezione media:

0 ( )
1 4
1 1/ 4 3
L y L
L y y L
h
h h dy h
L
=
= = = =
+ − ∫

ossia:

( )
( )
0.25
3 '
0.943 lv l l v l
L
l sat p

$h\ g$
h
$L\ T\ T$
$\rho\ \rho\ \rho\ \lambda$
μ

Per calcolare il coefficiente di scambio termico convettivo si utilizza la teoria di Nusselt che porta alla seguente correlazione per il calcolo del valore medio sulla lunghezza L

$$h_L = 0.943\left(\frac{\rho_l(\rho_l-\rho_v)\, g\, h'_{lv}\,\lambda_l^3}{\mu_l\, L\,(T_{sat}-T_p)}\right)^{0.25}$$

In forma adimensionale la precedente si può scrivere:

$$Nu_L = \frac{h\,L}{\lambda_l} = 0.943\left(\frac{\rho_l(\rho_l-\rho_v)\, g\, h'_{lv}\,L^3}{\mu_l\,\lambda_l\,(T_{sat}-T_p)}\right)^{0.25}$$

Oggi si hanno correlazioni più precise e sofisticate di quella di Nusselt e in particolare l'entalpia di condensazione viene data dalla relazione:

$$h'_{lv} = h_{lv} + 0.68\, c_{p,l}\,(T_{sat}-T_p)$$

che tiene conto anche di eventuali moto ondosi del liquido e di condizioni di turbolenza che possono manifestarsi a partire da una certa sezione.

Per banchi di tubi si utilizza la correlazione di Chen:

( ) ( ) ( )

( )

0.25

' 3

0.728 1 0.2 1 p s p l v l lv

L

l s p

c T T gh

h n

r nd T T

ρ ρ ρ λ

μ

□ − □ □ − □

= □ + − □ □ □

□□ □□ □□ − □□

ove n è il numero di tubi di diametro d.

8.5 I TUBI DI CALORE (HEAT PIPE)

Una interessante applicazione di quanto sopra visto per l’ebollizione e la condensazione si ha nei tubi di calore (Heat Pipe) schematizzati in Figura 108. Si tratta di un tubo le cui dimensioni possono essere di pochi millimetri e di metri, a seconda dei casi, all’interno del quale è posto un vapore saturo nelle condizioni di temperatura e pressione di esercizio.

Nella zona inferiore si ha la testata calca nella quale viene ceduto calore al fluido che, per conseguenza, vaporizza.

Per effetto di microcavità create all’interno del tubo si hanno movimenti di vapore verso l’alto (ma il fenomeno è indipendente dalla gravità per effetto della micro capillarità creata nel tubo). In alto si ha una testa fredda nella quale si asporta calore provocando il raffreddamento e quindi la condensazione del vapore. Questo cede il suo calore latente di condensazione e pertanto il trasporto di calore dal basso verso l’alto è molto efficace.

Il liquido condensato scende verso il basso sempre per capillarità, aderendo alle pareti laterali del tubo. In questo modo si riprende il ciclo di ebollizione (endotermica) in basso e condensazione (esotermica) in alto. Il tubo di calore, quindi, è un sistema efficace di trasporto di calore dalla zona a contatto con la testata calda verso la zona a contatto con la testata fredda.

La capillarità interna al tubo di calore consente il funzionamento in qualsiasi condizioni, anche in assenza di gravità. Pertanto questa tecnica viene utilizzata, ad esempio, in applicazioni spaziali, in geotermia, in energia solare, in elettronica per il raffreddamento di microprocessori.

TESTATA

FREDDA
TESTATA
CALDA
LIQUIDO
ALLE PARETI
VAPORE AL CENTRO

Figura 108: Schematizzazione del tubo di calore

Una applicazione recente in elettronica è costituita da una testata calda che viene posta sulla superficie di un microprocessore interno ad un computer portatile[30] ed una testa fredda collegata alla parte esterna del coperchio (dietro lo schermo) che funge, così, da radiatore.

Il calore generato dal microprocessore viene portato dai micro tubi di calore sulla superficie esterna del coperchio e da questo disperso per convezione ed irraggiamento nell’ambiente.

Questo sistema è stato ben ingegnerizzato ed ha un costo stimato, su scala industriale, di 25 $ e quindi tale da non aggravare il costo complessivo del computer. Con l’aumentare della potenza termica prodotta dai microprocessori questo sistema sarà sempre più conveniente.

In energia solare si utilizzano i tubi di calore con freon come fluido di lavoro. Lo schema funzionale è illustrato nella Figura 109.

ALETTE DI RAME
TUBO DI QUARZO
TUBO DI CALORE
CON FREON

Figura 109: Sezione di un collettore solare a tubo di calore

Si tratta di tubi al quarzo, quindi trasparenti, all’interno dei quali si pone un tubo di calore con due alette laterali in rame. Le alette, investite dalla radiazione solare e per l’effetto serra che si genera all’interno del tubo di quarzo, convertono la radiazione solare in calore che viene trasmesso verso la zona centrale ove è presente il tubo di calore.

Rispetto alla configurazione di Figura 108 manca la testata calda sostituita dalle superfici alettate lungo tutto la lunghezza del tubo di calore. E’ però presente la testata fredda che viene inserita all’interno di un grosso tubo all’interno del quale passa l’acqua di refrigerazione che, pertanto, viene riscaldatata e quindi trasporta l’energia utile all’esterno.

Il tubo di calore ha dei limiti di funzionamento dovuti al fatto che la sezione di passaggio del liquido può essere interrotta nel caso in cui la generazione di vapore (di elevato volume specifico) sia superiore al limite consentito dalla sezione stessa.

Si definisce, quindi, un flusso critico di flusso come il flusso massimo consentito nella testata calda senza interruzione della circolazione del flusso interno.

[30] Il computer portatili presentano condizioni operative pi□ critiche rispetto a desktop perch□ la componentistica □par racchiusa in spazi limitati e miniaturizzati e perch□ l’utilizzo di sistemi di raffreddamento attivi consumano energia che riduce la durata delle batterie di alimentazione. Le ultime generazioni di computer usano un contenitore in lega di magnesio che □ leggera ma □ anche buona conduttrice di calore. Pertanto il calore prodotto dal microprocessore viene disperso da tutta la superficie di appoggio del computer e in parte dal coperchio per convezione termica naturale.

9 L’IRRAGGIAMENTO

E' l'ultima forma di trasmissione del calore che prendiamo in esame. Come gi□ accennato in precedenza in questo caso l'energia viaggia sotto forme di onde elettromagnetiche e pu□ propagarsi anche nel vuoto. Pertanto l'irraggiamento non richiede presenza di materia come invece richiedono la conduzione e la convezione termica.

Le onde elettromagnetiche, emesse da tutti i corpi a temperatura superiore allo zero assoluto, divengono energia interna (e quindi calore) quando sono assorbite da un altro corpo. Nello spazio la materia non □ presente e si ha il freddo siderale cos□ come in alta montagna la rarefazione della materia provoca l'abbassamento di temperatura rispetto al fondo valle.

L'energia elettromagnetica assorbita da un corpo viene trasformata in energia interna e quindi in agitazione molecolare.

Si ricorder□ che l'energia interna □ proporzionale, tramite il calore specifico a volume costante, alla temperatura assoluto del corpo stesso e quindi si intuisce come mai l'incremento dell'energia interna porti ad incremento della temperatura del corpo.

Si sottolinea l'importanza dell'irraggiamento: □ tramite questa forma di trasmissione dell'energia che il sole ci riscalda. Lo studio dell'irraggiamento presenta aspetti matematici complessi. Qui si cercher□ di semplificare al massimo tale trattazione ricordando solamente le leggi fondamentali.

Una radiazione elettromagnetica □ caratterizzata da tre parametri fondamentali: la lunghezza d'onda, la frequenza, la velocit□ di propagazione nel mezzo. Vale la legge generale delle onde:

$$\lambda \nu = \frac{c_0}{n}$$

ove:

- λ □ la lunghezza d'onda di solito espressa in μm;

· ν □ la frequenza di oscillazione (cicli al secondo) espressa in Hz (Hertz);
· n □ l'indice di rifrazione del mezzo, per l'aria e per il vuoto □ pari ad 1;
· c_o □ la velocit□ della luce nel vuoto, 2,993 .10^8 m/s.
Ogni radiazione □ caratterizzata da una lunghezza d'onda e quindi da una frequenza, come
indicato in Figura 110.
0,001 m 10/4
0.78 μ
0,38 μ
1 A=10-8 cm 1 F=10-13 cm
Onde radio Onde Radar Raggi Infrarossi
Luce
Raggi ultravioletti Raggi X Raggi gamma
Figura 110: Tipologia delle onde elettromagnetiche al variare della lunghezza d’onda
Poich□ il meccanismo fondamentale di trasformazione da energia elettromagnetica a termica
passa per l’assorbimento dei corpi occorre subito osservare che, in generale, una radiazione incidente
con uno strato di materia, vedi Figura 111, viene in parte riflessa (con fattore ρ), in parte trasmessa
8con fattore τ) e in parte assorbita (con fattore α).
Ciascuno di questi fattori (α, τ, ρ) dipendono dalla lunghezza d’onda, cio□ dalla tipologia di
radiazione elettromagnetica. Ad esempio i corpi assorbono bene le radiazioni infrarosse ed ultraviolette
ma assorbono poco i raggi X e γ ed □ per questo motivo che queste ultime si utilizzano per le x-grafie e
γ-grafie dei materiali.

Quindi si pu□ riscaldare in poco tempo un pollo in un forno a microonde (cio□ con raggi
infrarossi) piuttosto che con raggi γ che lo attraversano senza interagire, praticamente, con la materia.
Fra i fattori suddetti vali la relazione:
$t_{\lambda}{}_{\lambda}{}_{\lambda}\ 1 + \rho + \alpha =$
Onda Incidente
Riflessa
Trasmessa
Assorbita
Figura 111: Interazione delle onde elettromagnetiche con la materia
Le onde elettromagnetiche che interessano il campo termico sono le cosiddette onde infrarosse e le onde
ultraviolette aventi un intervallo di lunghezza d'onda comprese fra 10^{-4} m a 10^{-2} μm. Si ricorda che le onde
elettromagnetiche comprese fra 0,38 e 0,78 μm sono di fondamentale interesse per l'uomo in quanto
per l’effetto[31] che provocano sull’uomo sono chiamate luce visibile.
La radiazione solare ha una variabilit□ della lunghezza d'onda che va dalle radiazioni ultraviolette a
quelle infrarosse lontane e comprende la luce visibile per circa il 48% della radiazione totale emessa. La

composizione dello spettro solare (cioè della distribuzione delle radiazioni in funzione della lunghezza d'onda) varia con l'altitudine e con la massa atmosferica (nubi, aria pulita,...), come si dirà nel prosieguo.

9.1 UNITÀ DI MISURA PER L'IRRAGGIAMENTO

Considerato il diverso meccanismo della trasmissione del calore per irraggiamento rispetto a quelle per conduzione e per convezione termica, occorre introdurre alcune opportune unità di misura relative alle grandezze di scambio usuali nell'irraggiamento.

Le radiazioni elettromagnetiche hanno proprietà direzionali (si pensi al comportamento di uno specchio rispetto ad una superficie opaca uniformemente riflettente) e pertanto le grandezze radiative debbono prendere in considerazione sia la natura (cioè la lunghezza d'onda λ) che la direzionalità (cioè par l'angolo solido di emissione).

9.1.1 EMISSIONE MONOCROMATICA

Definiamo Emissione monocromatica la potenza radiativa emessa da una superficie nell'intervallo fra λ e dλ, cioè:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{dq}{dS\,d\lambda}$$

Essa è espressa in [W/m²µm]. Si vedrà nel seguito che un corpo non emette uniformemente al variare della frequenza e pertanto mediante questa grandezza possiamo sapere quanta potenza radiativa viene emessa ad ogni lunghezza d'onda. Si suole definire questa grandezza anche come emissione monocromatica poiché ad ogni λ corrisponde un colore (cioè una tipologia di radiazione).

[31] Si chiarisce qui il concetto che non sono le onde elettromagnetiche ad essere chiamate luce ma la sensazione da esse prodotte nel nostro cervello. La visione avviene, infatti, tramite l'interpretazione dei segnali sensoriali che pervengono, tramite il nervo ottico, al cervello.

9.1.2 EMISSIONE GLOBALE

Se integriamo la emissione monocromatica in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda (cioè da 0 ad ∞) si ha l'emissione globale di una superficie:

$$E = \int_0^\infty e_\lambda \, d\lambda$$

Le unità di misura sono, quindi, [W/m²].

9.1.3 INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA

Se consideriamo una superficie dS e con riferimento alla sua normale n si vuole individuare la potenza emessa nella direzione ω entro un angolo solido[32] dω, vedi Figura 112. Si definisce allora

intensit di emissione monocromatica il rapporto:
α
dΩ
dS
n
Figura 112: Intensit di emissione monocromatica
$_{,}\cos$
dq
di
$dS\ d\ d\ _{\lambda}\alpha\ \lambda\ _{\Omega}=$
$\cdot\ \cdot\ \Omega$
Le unit di misura sono [W/m µm sr]
9.1.4 INTENSIT DI EMISSIONE GLOBALE
Se integriamo l'intensit di emissione monocromatica per tutte le lunghezze d'onda allora si ha:
0
$I\ i_{\lambda}\, d\lambda\ _{\infty}$
$_{\Omega}=\int$
che l'intensit totale nella direzione Ω. E si misura in [W/m sr].
9.2 EMSISSIONE EMISFERICA
Si consideri una superficie emittente nel semispazio[33], come indicato in Figura 113. Allora si ha
che l'angolo solido vale:
2
$2\ r\ sen\ rdr$
d
r
$\omega=\pi\cdot\alpha\cdot$
e l'emissione nel semispazio vale:
$/\ 2$
0
$E\ 2\ I\ sen\ \cos\ d$
π
$_{\alpha}=\pi\int\ \alpha\ \alpha\ \alpha$
[32] Si definisce angolo solido il rapporto fra la calotta sferica e il quadrato del raggio. Nel caso generale si pu definire
angolo solido il rapporto fra la superficie proiettata nella direzione di emissione e il quadrato della distanza. L'angolo solido
varia da 0 a 4 π. Il semispazio pari a 2 π. L'unit dell'angolo solido lo steradiante indicato con sr.
[33] Le radiazioni elettromagnetiche emesse da un corpo provengono da uno strato superficiale di pochi Angstrom
poich le emissioni degli strati pi profondi sono assorbite dalla stessa materia del corpo. Pertanto data una superficie si
deve conservare solo l'emissione in un semispazio, come nel caso qui considerato.

Cio si ha:
$E=\pi\ I_{a}$
Se si considerano grandezze monocromatiche si ha una relazione del tutto analoga:
$_{,}e\ i\ _{\lambda\ \lambda\ \alpha}=\pi$

Queste relazioni risultano molto importanti per il prosieguo e per l'Illuminotecnica.

α
dS
n

Figura 113: Emissione emisferica

9.3 IL CORPO NERO

L'interazione delle onde elettromagnetiche con la materia è caratterizzata dai tre fattori ρ, α, τ ciascuno funzione della lunghezza d'onda. Risulta allora estremamente complesso caratterizzare il comportamento di un corpo (sia che sia emettitore che assorbitore) e pertanto occorre fare una idealizzazione che consenta di scrivere relazioni cercate: supporremo l'esistenza di un corpo ideale capace di assorbire tutte le radiazioni e quindi le sue interazioni con le radiazioni sono estremamente semplici. Tale corpo è detto corpo nero ed è bene sottolineare che la parola nero si riferisce non solamente al colore visivo nero ma anche a tutte le lunghezze d'onda esistenti. Possiamo dire, con un gioco di parole, che il corpo nero è più nero del nero visibile. Ad esempio la neve appare di colore bianco ma è un ottimo corpo nero per le radiazioni ultraviolette. Il corpo nero emette una radiazione che è data dalla relazione di Planck seguente:

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)}$$

ove il simbolismo è il seguente:

- λ è la lunghezza d'onda, μm;
- T è la temperatura assoluta del corpo nero, K;
- ε(λ,T) è la radianza monocromatica cioè l'energia emessa per unità di tempo, nell'intervallo di lunghezza d'onda dλ attorno alla frequenza λ e per unità di superficie; [W/(μmK)].
- C1 e C2 sono due costanti pari a

$$C_1 = 3.742 \cdot 10^{8}$$

$$C_2 = 1.439 \cdot 10^{4}$$

Una rappresentazione grafica della legge di Planck per temperature variabili da 1000 a 6000 K (dal

basso verso l'alto) data nella Figura 114 seguente ove si sono segnati anche
gli intervalli di visibilitpar dell'occhio umano medio (0,38 e 0,78 μm). La curva
pi alta relativa a 6000 K che la temperatura
apparente del disco solare: tale curva in buona approssimazione la curva di emissione del sole cos
come si pu rilevare immediatamente fuori dell'atmosfera.

Al disotto dell'atmosfera si hanno assorbimenti dei gas (CO_2, O_2, NO_2, O3, H_2O,..) che
modificano sensibilmente tale spettro. L'esame di queste curve (con temperature crescenti verso l'alto)
ci mostra che i massimi di ciascuna curva si sposta verso lunghezze d'onda decrescenti secondo la
relazione:

$$\lambda_{max} T = 2897.6$$

che esprime una legge di variazione iperbolica di λ_{max} (cio della lunghezza d'onda per la quale si
ha la massima emissione) con la temperatura assoluta T di emissione del corpo nero.
Tale curva riportata in fig. 6 come linea tratteggiata che tocca i punti massimi delle curve di
emissione del corpo nero. Per la temperatura di 6000 K si ha, ad esempio, una
λ_{max}=0,498 μm. Si par detto che l'occhio umano vede la luce nell'intervallo fra
0,38 e 0,78 μm e pertanto il valore di λ_{max} sopra
indicato corrisponde alla zona di massima visibilit dell'occhio umano medio.
Un corpo alla temperatura di 300 K ha λ_{max}=9,56 μm e cio emette nel campo delle radiazioni
infrarosse. Cos avviene per il corpo umano il cui campo di emissione radiativo ricade proprio
nell'infrarosso (si parla di infratermia per la riprese fotografiche ai raggi infrarossi per uso medico). Un
metallo al punto di fusione, ad esempio il ferro, alla temperatura di 2000 K ha λ_{max}=1,49 μm e quindi
nel campo dell'infrarosso vicino: il ferro incandescente, infatti ha un colore rossiccio tipico del metallo
caldo e al crescere della temperatura di riscaldamento tende al giallo-rosso fino a divenire bianco alla
fusione.
La lava appare rossiccia alla temperatura di uscita dal cratere ma quando si
raffredda non pipar visibile: una fotografia all'infrarosso renderebbe visibile
il magma. Le curve E(λ,*T*) forniscono
l'indicazione dell'energia emessa al variare della lunghezza λ delle radiazioni. Se si desidera conoscere
l'energia totale emesse in tutto lo spettro (cio per *l* variabile da 0 ad si ha la relazione di Stefan -
Boltzmann:

$$E_o = \sigma T^4 \quad [138]$$

con:
· σ_0 =5,64 .10^{-8} W/(m^2K^4) detta costante di Stefan - Boltzmann;

· T la temperatura assoluta del corpo nero, K;
· E energia globale radiante specifica, W/m^2.
La [138] di grande importanza[34] perch consente di calcolare la quantit di energia irradiata da
un corpo nero una volta nota la sua temperatura assoluta. Si badi bene che un corpo nero irradia sempre
purch a temperatura superiore allo zero assoluto (cio sempre, visto lo zero assoluto non par raggiungibile mai, secondo il terzo principio della Termodinamica).
Pertanto se due corpi neri si scambiano (nel senso che si dir nel successivo paragrafo) energia
radiativa allora si ha che il corpo caldo irradia il corpo freddo e quello caldo irradia quello caldo.
L'interscambio (cio la differenza di energia fra quella irradiata e quella ricevuta) positiva per il corpo
caldo e ci a conferma del secondo principio della termodinamica che vuole il flusso termico positivo
se scambiato da un corpo caldo verso un corpo freddo.

9.4 EMISSIVIT SPECIFICA

Il corpo nero una idealizzazione necessaria per potere effettuare gli studi teorici sui meccanismi
della radiazione termica. I corpi reali sono ben pi complessi in quanto hanno un comportamento non
facilmente ottenibile in forma analitica. Figura 115 si hanno alcuni spettri caratteristici di emissione
radiativa.

[34] Pu essere interessante osservare che la $E_o=\sigma T^4$ stata derivata da Boltzmann verso la met del secolo scorso
e cio molto prima che Planck pubblicasse la sua legge di emissione del corpo nero. In effetti Boltzmann ricav la sua
relazione solo con considerazioni termodinamiche senza ancora conoscere nulla sulla teoria quantistica di Planck.

Si osservi come l'emissione monocromatica pu variare con continuit (anche se in modo non
analiticamente definibile) o in modo discreto (come avviene, ad esempio, nelle lampade a scarica nei
gas) e come, ultimo diagramma in basso, l'emissione del corpo nero abbia le caratteristiche sopra
descritte.
Procedendo per passi successivi si pu definire corpo grigio un corpo che emetta, per data
temperatura, come un corpo nero ma con intensit che sta a quello dello stesso corpo nero in rapporto
costante. Si pu definire emissivit il rapporto fra l'emissione del corpo grigio e quella del corpo nero
secondo la seguente relazione:

4
n o
E E
E T

ε
σ
= = [139]
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4
0
2 .10 6
4 .10 6
6 .10 6
8 .10 6
1 .10 7
1 10 7 ·
0
e(λ , 2000)
e(λ , 2500)
e(λ , 2800)
e(λ , 3000)
e(λ , 4000)
e(λ , 5000)
e(λ max (T) , T)
0 λ , λ , λ , λ , λ , λ , λ max (T) 4
Figura 114: Curve di emissione di Planck per corpo nero a varie temperature.
ove con E si indica l'emissione del corpo grigio e con E_n quella del corpo nero.
Dalla [139] si deduce
che per avere l'emissione globale di un corpo grigio basta conoscere la sua emissivit e moltiplicarla per
l'emissione totale del corpo nero (relazione di Stefan - Boltzmann [138].
Pertanto si ha, in generale, la seguente relazione:

$$E = \varepsilon \sigma_o T^4 \quad [140]$$

Poich l'emissivit sempre minore di uno il corpo grigio emette sempre meno del corpo nero
alla stesso temperatura. Ad esempio nella Figura 116 si ha un esempio di emissione di corpi neri, grigi e
reali (detti anche selettivi) nella quale si pu osservare la grande variabilit dell'emissione monocromatica
nei corpi reali e la difficolt di descrivere questa grandezza con relazioni matematiche esplicite.
Dall'osservazione della Figura 116 si deduce che un corpo grigio emette sempre in proporzione
costante (pari alla sua emissivit) rispetto al corpo nero a pari temperatura e quindi per esso ε non
dipende dalla lunghezza d'onda ma solo dalla temperatura, inoltre un corpo reale emette sempre meno
del corpo nero a pari temperatura anche se in certi intervalli di frequenza possono emettere pi di un
corpo grigio equivalente.

Figura 115: Tipologie di Emissioni radiative
Figura 116: Andamento di ε per corpi neri, grigi e reali.
Figura 117: Andamento dell'emissione monocromatica per corpi neri, grigi e reali.

Questo fenomeno, detto selettivit dell'emissione dei corpi reali, risulta molto

utile in numerose
applicazioni quali, ad esempio, la costruzione dei filamenti di tungsteno delle lampade ad
incandescenza[35] o nella scelta di sostanze che mettano selettivamente in intervalli di frequenza diversi (ε
bassa per lunghezze d'onda grandi, > 7 μm, e ε grandi per lunghezze d'onda piccole, <3 μm) utilizzate
per la costruzione di collettori solari selettivi ad elevata efficienza di raccolta.
La relazione [140] pu ulteriormente essere generalizzata per lo scambio di due superfici grigie,
ciascuna a temperatura T_1 e T_2 , tenendo conto anche del fattore di forma e ottenendo la reazione generale
dello scambio termico radiativo fra due corpi grigi:

$$E = S F_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad [141]$$

Il calcolo di F_{12}, detto fattore di forma o di vista, sar approfondito nel prossimi paragrafi.

9.4.1 LEGGE DI KIRCHHOFF

Per corpi in equilibrio termodinamico si ha:

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \varepsilon = \frac{e_{n\lambda}}{1}$$

e pertanto risulta:

$$e_\lambda = a_\lambda$$

Analoga relazione vale per le emissivit e i fattori di assorbimento totali, e cio si ha:

ε = α

Questa relazione pu facilmente dimostrarsi supponendo di avere un corpo grigio all'interno di
una cavit nera in equilibrio termico con essa.
Allora l'energia ricevuta deve essere pari a quella irradiata e quindi deve aversi:

$$a_\lambda G_\lambda = \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}$$

ove G_λ l'irradiazione (cio l'energia ricevuta) alla frequenza λ .
Poich l'energia ricevuta dal corpo grigio proviene dal corpo nero per il quale $G_\lambda = E_{n\lambda}$
semplificando i due membri si ottiene la legge di Kirchhoff.

9.5 I CORPI NON GRIGI

I corpi che non appartengono ai corpi neri e neppure ai corpi grigi sono detti corpi selettivi e sono,
in pratica, i corpi reali.
Essi emettono sempre meno del corpo nero (che oltre ad assorbire tutto emette anche pi di
qualunque altro corpo esistente) ma pu avere uno spettro di emissione che non pi in rapporto
costante con quello del corpo nero (come avviene per il corpo grigio) ma variabile con la lunghezza

d'onda.
I corpi selettivi possono emettere più in certe zone dello spettro e meno in altre rispetto al corpo
grigio (e quindi sempre meno del corpo nero) donde il loro nome selettivi.
Lo scambio radiativo dei corpi selettivi è molto complesso poiché oltre alle complicazione della
geometria (e quindi nel calcolo dei fattori di forma) essi impongono il calcolo delle potenze scambiate
anche al variare delle lunghezze d'onda.
Inoltre i corpi selettivi non hanno emissione termica specifica esprimibile in forma analitica ma
quasi sempre in forma tabellare o grafica derivate dalle sperimentazioni pratiche

[35] Il tungsteno emette nell’intervallo del visibile, 0.38÷0.78 μm , più dei corpi grigi a parità di temperatura. Questa proprietà □par sfruttata per migliorare l'emissione luminosa delle lampade in quanto con il filamento di tungsteno emettono assai meglio
che con filamento di altro materiale.

9.6 CONCETTO DI FATTORE DI FORMA

Lo scambio radiativo fra due o più corpi neri è problema di non facile soluzione tranne in casi e
geometrie semplici per altro abbastanza comuni nella realtà. Pur tuttavia è opportuno approfondire in
questa sede lo studio del Fattore di Forma in considerazione delle applicazioni che di questo sarà fatta nel
prosieguo, ad esempio per lo studio degli scambi radiativi fra corpo umano e pareti di un ambiente per
le condizioni di benessere. In Figura 118 è indicato il caso di due corpi neri che si vedono secondo due
angoli solidi Ω e Ω'’ ed aventi una distanza R fra due punto P e P' giacenti su di essi. In generale la
trattazione per il calcolo del Fattore di Forma richiede ulteriori approfondimenti sullo scambio radiativo.
Dette T_1 e T_2 le temperature delle due superfici, si ha il seguente sviluppo. L’intensità emisferica della
superficie A_1 vale:

1 2
1 1 2 1 1 1 1
1 1 1
cos
cos
dq
I dq I dA d
dA d
φ
φ →
→ = ⇒ = Ω
Ω
[142]
n
n
φ

ϕ
1
1
2
2
r
dA
1
dA_2
A_1
A_2
Figura 118: Scambio radiativo fra corpi neri (Fattore di Forma)
Se la superficie A_1 è un Corpo Nero (CN) allora si può dimostrare che l'intensità di emissione
emisferica è legata alla emissione globale, come visto in precedenza, dalla relazione seguente:
4
1 1 2 2
1 1 2
$\cos$ $_n E$ T dA
I d
r
σ ϕ
π π
$= = \Omega =$
Questa relazione vale anche per le grandezze monocromatiche per cui è:
e
i λ
λ π
$=$
allora il flusso che dal corpo nero 1 va verso il corpo nero 2 è dato dalla relazione:
1 2 1 2
1 2 1 2
$\cos$ $\cos$
n
dA dA
dq E
r
ϕ ϕ
π $\rightarrow =$
Si definisca ora il Fattore di Forma come la frazione dell'energia complessivamente emessa dal
corpo nero 1 che giunge al corpo nero 2:
1 2
1 2 1 2 1 2
12 2
1 1
1 $\cos$ $\cos$
n A A
dq dA dA
F
E A r
ϕ ϕ
π
$= \rightarrow = \int \int$ [143]
Allora si può scrivere per il flusso che da 1 va verso 2:
1 2 12 1 n1 $Q \rightarrow F$ A $E =$
Analogamente si può ragionare per la superficie 2 per cui il flusso che da 2 va

verso 1 dato da:
2 1 2 1
2 1 2 2
cos cos
n
dA dA
dq E
r
ϕ ϕ
π $\rightarrow =$

2 1
2 1 2 1 2 1
21 2
2 2
1 cos cos
n A A
dq dA dA
F
E A r
ϕ ϕ
π
$= \rightarrow = \int \int$ [144]
Si osservi come il Fattore di Forma F_{12} dipende solo da grandezze geometriche e non da grandezze
radiative. In pratica esso dipende solo da come le due superfici si vedono mutuamente.
Il flusso radiativo che dalla superficie 2 viene irradiato verso la superficie 1 :
2 1 21 2 $n2$ $Q \rightarrow F\ A\ E =$
Se le due superfici sono alla stessa temperatura allora vale la relazione:
2 1 1 2 12 1 1 21 2 2 e quindi $=$ n n $Q \rightarrow Q \rightarrow F\ A\ E\ F\ A\ E =$
essendo $E_{n1}=E_{n2}$ si ha:
12 1 21 2 $F\ A = F\ A$ [145]
Pertanto sufficiente conoscere uno solo dei fattori di forma (o di vista) per conoscere, note le
superfici emittenti, l'altro. Del resto data la formulazione analitica di F_{12} deriva anche:
1 2
1 2 1 2
12 2
1
1 cos cos
A A
dA dA
F
A r
ϕ ϕ
π
$= \int \int$
2 1
2 1 2 1
21 2
2
1 cos cos
A A
dA dA
F
A r

φ φ
π
= ∫ ∫
Ma poich:
1 2 2 1
1 2 1 2 2 1 2 1
2 2
cos cos cos cos
A A A A
dA dA dA dA
r r
φ φ φ φ
π π
∫ ∫ = ∫ ∫
risulta anche:
12 1 21 2 F A = F A [146]
Questa relazione detta relazione di reciprocit o anche teorema di reciprocit.
Dunque il flusso netto scambiato si pu scrivere come:
4 4
1 2 2 1 1 12 1 2 21 2
4 4 4 4
1 12 1 2 2 21 1 2 ( ) ( )
Q Q Q A F T A F T
A F T T A F T T
σ σ
σ σ
→ → = − = − =
= − = − −

9.6.1 ADDITIVIT DEI FATTORI DI FORMA

Se la superficie A(j) risulta dalla somma di Ak (k=1,2,..n) superfici parziali, allora sussiste la
seguente propriet di additivit dei Fattori di Forma:
( )
1
n
i j ik
k
F F
=
=Σ
Moltiplicando ambo i membri per Ai , si ha:
( )
1 1 1
n n n
i i j i ik i ik k ki
k k k
A F A F A F A F
= = =
= Σ = Σ = Σ
l'ultimo passaggio lecito per il teorema di reciprocit.

1 2
3
k
n
A
i

A
(j)
Fik

Figura 119: Additività dei Fattori di Forma

Ne segue che il generico Fattore di Forma è dato dalla relazione:

$$F_{i(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k F_{ki}}{A_i} \qquad [147]$$

oppure , sempre per il teorema di reciprocità, dalla relazione:

$$F_{(j)i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k F_{ki}}{A_j} \qquad [148]$$

Esempio di calcolo dei fattori di forma

Data la situazione di Figura 119 calcolare F13 fra la superficie 1 e la superficie 3.

1
2
3
j
i

Figura 120: Scambio radiativo fra superfici piane (pareti d’angolo)

Si applichi la relazione di additività dei fattori di forma:

$$A_i F_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_k F_{ki}$$

con i=3 ; j =(1+2) ; k=1÷3. Si ha subito:

$$A_3 F_{3(1+2)} = A_1 F_{13} + A_2 F_{23} \Rightarrow F_{13} = \frac{1}{A_1}\left(A_3 F_{3(1+2)} - A_2 F_{23}\right)$$

I termini del tipo $F_{3(1+2)}$ e F_{23} sono ricavabili dai diagrammi solitamente disponibili, come
riportati in Figura 120. Applicando il teorema di reciprocità si ha:

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_2} F_{13}$$

Con F_{13} dato dalla formula precedente. Oppure mediante le regole dell'additività si ha:

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_2} F_{13} = \frac{1}{A_3}\left(A_3 F_{3(1+2)} - A_3 F_{32}\right) = F_{3(1+2)} - F_{32}$$

In alternativa si può ancora scrivere, sempre per la regola di additività, la relazione:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{n} F_{ik}$$

ancora con:

i=3 ; j = (1+2) ; k=1,÷3

e pertanto si ha subito :

$$F_{3(1+2)} = F_{31} + F_{32} \Rightarrow F_{31} = F_{3(1+2)} - F_{32}$$

Quanto sin qui detto trova applicazione in Architettura anche nella verifica di illuminazione diurna, come illustrato dalla seguente Figura 121.

Figura 121: Verifica dell'illuminamento diurno in un punto interno di una sala

In questo caso si può vedere l'effetto dovuto alla parte di finestra libera e a quella di una ostruzione. L'additività dei fattori di forma dianzi descritta consente di calcolare il fattore di forma dovuto alla sola parte di finestra libera.

9.7 PRINCIPIO DELLA SFERA UNITARIA

Un metodo molto applicato deriva dall'applicazione del principio della sfera unitaria derivato dal teorema di Lagrange. Si osservi la Figura 122.

Il principio della sfera unitaria dice che l'irraggiamento (vedi paragrafo seguente per la definizione) prodotto da una superficie in un punto P giacente sul piano orizzontale è equivalente a quello prodotto da un elemento dS giacente sulla sfera di raggio unitario avente centro in P e che vede con lo stesso angolo solido la superficie irraggiante.

α
β

Figura 122: Applicazione del teorema di Lagrange

Tale irraggiamento è proporzionale anche alla proiezione sul piano orizzontale della superficie dS

intercetta sulla sfera. La dimostrazione immediata come qui di seguito indicato. L’irraggiamento G par dato da:
2
$I\, A$ cos cos
E
R
$= \cdot \cdot \beta \cdot \alpha$
A parit di angolo solido si ha:
$I \cdot A \cdot \cos\alpha = I \cdot A'$
ove A’ la proiezione dell’area A sulla semisfera di raggio unitario. Ne segue che l’irraggiamento
G vale:
2
' cos
$I\, A$
G
R
$= \cdot \cdot \alpha$
Si osserva che A’cosα la proiezione di A’ sul piano orizzontale interno alla semisfera. Detta A’’
questa proiezione si ha:
2
"
"
$I\, A$
$G\, I\, A$
R
$= \cdot = \cdot$
essendo R=1.

9.8 METODO DELLA RADIOSIT

Se le superfici radiative non sono nere il calcolo degli scambi diviene pi complesso perchpar occorre tenere conto non solo dell’energia emessa dalle superfici ($\varepsilon\,\sigma_0 T^4$) per effetto della temperatura alla quale si trovano ma anche dell’energia riflessa. Si definisce, infatti, radiosit la somma:

$$J_i = \rho_i G_i + \varepsilon_i E_{ni} \quad [149]$$

ove si ha il seguente simbolismo:
· J radiosit, [W/m]
· ρ fattore di riflessione della parete,
· ε emissivit termica della parete,
E_{ni} emissione globale del corpo nero alla medesima temperatura della parete, [W/m].
Ricordando che dalla: ρ+α+τ =1 per un corpo opaco (τ=0) e grigio (α=ε), si ha ρ = 1 - α =1-ε,
allora risulta:

$$J_i = (1-\varepsilon_i) G_i + \varepsilon_i E_{ni} \quad [150]$$

Il bilancio energetico sul Volume di Controllo vale :

$$Q_i = A_i (J_i - G_i) \quad [151]$$

Allora eliminando G_i dalla 1) e 2) , risulta :

$$Q_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{1-\varepsilon_i}\left(E_{ni} - J_i\right) \qquad [152]$$

Questa relazione si può ancora scrivere nella forma equivalente:

$$Q_i = \frac{E_{ni} - J_i}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} \qquad [153]$$

che esprime il flusso termico Q_i come rapporto fra le differenze delle emissioni e la resistenza radiativa superficiale del mezzo data dalla relazione:

$$R_{rs} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i} \qquad [154]$$

D'altra parte l'energia ricevuta da A_i è pari a quella emessa da tutte le N superfici che vedono A_i:

$$G_i A_i = \sum_{k=1}^{N} J_k A_k F_{ki} = \sum_{k=1}^{N} J_k A_i F_{ik} = A_i \sum_{k=1}^{N} J_k F_{ik} \qquad [155]$$

per cui eliminando A_i: e combinando con le precedenti equazioni si ottiene :

$$Q_i = A_i\left(J_i - \sum_{k=1}^{N} F_{ik} J_k\right) = A_i\left(J_i \sum_{k=1}^{N} F_{ik} - \sum_{k=1}^{N} F_{ik} J_k\right) = \sum_{k=1}^{N} A_i F_{ik}\left(J_i - J_k\right)$$

1 1 1 1
( ) ( )
1
N N N N
i k
i ik i ik k i ik i k
k k k k
i ik
J J
A F J F J A F J J
A F
= = = =
= Σ − Σ = Σ − = Σ −

I termini a denominatore dell’ultimo membro sono detti resistenze radiative volumetriche: Si può par trovare lo stesso risultato con un ragionamento diretto. Considerando due superfici grigie che scambiano calore allora l’interscambio radiativo è dato dalla relazione (supponendo la temperatura della superficie 1 maggiore di quella della superficie 2):

12 1 1 12 2 2 21 $Q = J A F - J A F$

Per la regola di reciprocità dei fattori di forma si può scrivere anche:

( ) 1 2
12 1 12 1 2
1 12
1
J J
Q A F J J
A F
= − = −

ove, nell’ultima eguaglianza, si è esplicitata la resistenza radiativa volumetrica
1 12 2 21
1 1
$A F = A F$.

Ritornando alla cavità composta da N superfici radiative[36] allora il sistema di equazioni risolutive è dunque il seguente:

[36] Il numero minimo di superfici radiative è pari a 2 supponendo che una di esse almeno sia concava (come in un forno a legna). In questo caso, come in tutti i casi nei quali si hanno superfici concave, allora occorre tenere conto anche dell’aliquota di energia irradiata su se stessa e quindi occorre valutare il fattore di vista F_{jj}.

1
1
1
ni i
i
i
i i
N
i k
i
k
i ik
E J
Q
A

J J
Q
A F
ε
ε
=
 − = −

 = −

∑
[156]
Le incognite sono:
Q_i e J_i (i=1,2...N)
si hanno dunque 2N equazioni in 2N incognite
1 1
rv
ij j ji j
R
F A F A
= = [157]
La Figura 125 schematizza il calcolo di una rete elettrica (solamente ohmica) equivalente ad uno
scambio radiativo.

9.9 CASO DELLE DUE SORGENTI CONCAVE

Si considerino due superfici non nere generiche tali da formare una cavità chiuse (superfici
convesse-concave) come indicato in Figura 126.
Le equazioni di bilancio sono in generale le seguenti:
1
1
1
ni i
i
i
i i
N
i k
i
k
i ik
E J
Q
A
J J
Q
A F
ε
ε
=
 − = −

 = −

∑
[158]

In questo caso si hanno, particolarizzando, le seguenti equazioni:
Q
i
ρG
i ε
i i
En i
J
i
G
i
A
i
Ti
k
Figura 123: Metodo della radiosit par
1 1
1
1
1 1
1 1 1 2 1 2
1
1 11 1 12 1 12
2 1 2 2 2 1
2
2 21 2 22 2 21
2 2
2
2
2 2
1
1 1 1
1 1 1
1
n
n
E J
Q
A
J J J J J J
Q
A F A F A F
J J J J J J
Q
A F A F A F
E J
Q
A
ε
ε
ε
ε
− = −
− − − = + =
− − − = + =

=−
−

[159]

Figura 124: Fattori di forma per casi elementari

E
ni
i
J k
J
1
J
2
1- εi
εi Ai
J
N
1
A i Fik
J i

Figura 125: Rete equivalente allo scambio radiativo

1
2

Figura 126: Schema di scambio radiativo fra due superfici formanti una cavit par Poich per la legge di reciprocit e per la conservazione dell’energia:

1 12 2 21 1 2 A F = A F e Q = −Q = Q

le due equazioni intermedie si riducono ad una sola ed il precedente sistema diventa :

1 1
1
1 1 1
1 1
1 1
1 2 1 2
1 12
1 12
2
2 2
2 2
2 2
2
2 2
1
1 ( )
1
( )
1
1
( )
1
n
n
n
n
E J
Q
Q E J
A
A
J J Q J J
Q A F
A F

$$\begin{cases} E_{n1} - J_1 = Q \dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} \\ J_1 - J_2 = \dfrac{Q}{A_1 F_{12}} \\ J_2 - E_{n2} = Q \dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} \end{cases} \Rightarrow$$

e sommando membro a membro si ottiene la relazione:

$$Q = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [160]$$

Infine , ricordando che:

$$E_{n1} = \sigma T_1^4 \quad \text{e} \quad E_{n2} = \sigma T_2^4$$

si ha:

$$Q = \frac{\sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [161]$$

Questa relazione, detta di Christiansen, consente di determinare il fattore di forma:

12
1 2
1 1 1 12 2 2
1
1 1 1
F
A A F A
ε ε
ε ε
= − + + −
[162]

Utilizzando l’analogia elettrica si pu□ riportare lo schema radiativo fra le due superfici formanti
cavit□ nella seguente rete equivalente.

En1 J 1 J 2
En2
1- ε1
ε A1 1
1- ε2
ε A2 2
1
A1 F12
Resistenza
spaziale
Resistenze
superficiali

Figura 127: Rete elettrica equivalente

Che pu□ essere risolta con le classiche regole della Fisica.

9.9.1 SUPERFICI FINITE PIANE E PARALLELE

Nel caso di superfici piani e parallele (quindi con cavit□ che si chiude all’infinito) si ha la
situazione di figura seguente e il fattore di forma diviene:

1 2

Figura 128: Scambio radiativo fra superfici finite piane e parallele.

4 4
1 2
1 2
1 1 1 12 2 2
( )
1 1 1
T T
Q
A A F A
σ
ε ε
ε ε
= − + − + −
[163]

In realt□ per superfici finite si dovrebbero considerare gli effetti di bordo: il flusso termico emesso
dai bordi non colpisce esattamente la superficie opposta e quindi si ha una dispersione di linee di flusso.
Pertanto il fattore di forma come sopra calcolato □ in eccesso rispetto a quello reale.
Pur tuttavia □ consigliabile egualmente utilizzare questa relazione ed evitare le complessit□par derivanti dal considerare le superfici finite.

9.9.2 SUPERFICI INFINITE PIANE E PARALLELE

Ponendo le aree delle superfici:

$A_1 = A_2 = A\ ;\ F_{12} = 1$

si ha, per lo scambio radiativo, la relazione:

4 4
1 2
1 2
( )
1 1
1
$A\ T\ T$
Q
σ
$\varepsilon\ \varepsilon$
$= -$
$+ -$
[164]

1 2

Figura 129: Scambio radiativo fra superfici infinite piane e parallele.

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ risulta:

4 4
1 2 ( )
2
1
$A\ T\ T$
Q
σ
ε
$= -$
$-$

9.9.3 SFERE O CILINDRI CONCENTRICI

Consideriamo due superfici cilindriche o sferiche concentriche, come indicato nella seguente
figura. Ponendo, per evidenti ragioni, il fattore di forma:

2
1

Figura 130: Scambio radiativo fra sfere e cilindri concentrici

$F_{12} = 1$

risulta, facendo uso del teorema di reciprocit, che il flusso scambiato vale:

4 4
1 1 2
1
1 2 2
( )
1 1
(1)
$A\ T\ T$
Q
A
A
σ
$\varepsilon\ \varepsilon$

= −
\+ −
[165]

9.9.4 PARETE CHE IRRADIA VERSO IL CIELO

Consideriamo il caso della figura seguente: una parete irradia verso la volta celeste.

Risultano essere, per evidenti ragioni geometriche:

$$A_c >> A_p$$

$$F_{pc} = 1$$

Pertanto il flusso irradiato dalla parete vale:

$$Q_p = A_p \varepsilon_p \sigma \left(T_p^4 - T_c^4\right) \quad [166]$$

ove T_c è la temperatura della volta celeste che deve essere calcolata opportunamente in considerazione degli assorbimenti differenziati dei vari componenti gassosi dell'atmosfera.

A
A
c
p

Figura 131: Scambio radiativo fra parete e volta celeste.

9.9.5 SCHERMI RADIATIVI

Un concetto molto utile nelle applicazioni pratiche è quello di schermo radiativo. Date due superfici radianti si interponga fra di esse una terza superficie, come indicato in figura seguente.

Se le superfici sono di lunghezza infinita (o se c'è piccolo effetto di bordo nel caso di superfici finite, come già osservato) si può porre per i fattori di forma: $F_{13} = F_{23} = 1$ e quindi , dopo qualche passaggio, il flusso termico scambiato fra le superfici 1 e 2 diviene:

$$Q_{12} = \frac{\sigma A \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_{31}} + \frac{1}{\varepsilon_{32}} - 1} \quad [167]$$

e se : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon$ allora la precedente relazione si semplifica nella seguente:

( )
4 4
1 2
12 12 senza

schermo
1 ( ) 1
2 2 1 2
A T T
Q Q
σ
ε
□ □
= □□ − □□ =
□□ − □□
□ □
[168]
Pertanto una parete intermedia di eguali caratteristiche emissive (cio□ di eguale emissivit□ rispetto
alle pareti esterne) comporta una riduzione a met□ del flusso termico scambiato.
Estrapolando per N schermi intermedi si ha, sempre nell’ipotesi di eguali emissivit□:
( )
4 4
1 2
12 12 senza
schermo
1 ( ) 1
(1) 2 1 (1)
A T T
Q Q
N N
σ
ε
□ □
= □□ − □□ = + □□ − □□ +
□ □
[169]
Quindi il flusso termico fra le due superfici esterne si riduce di un fattore N+1.

ε
ε
ε
ε
1
13
23
2
T1
T2
Q
En1
J J En3 J J En2
1- ε 1
ε
1 A
1- ε 31
ε
31 A
1- ε 32
ε

32 A
1- ε 2
ε
2 A
1 31 32 2
1
A F
13
1
A F
23
Figura 132: Schermo radiativo interposto fra due superfici radianti.
Questo risultato trova notevoli applicazioni per la schermatura di sorgenti radiative, ad esempio di superfici fortemente irradiate dal sole[37] che porterebbero ad avere una disuniformit interna della temperatura media radiante e quindi un forte senso di disconforto termico.
In genere una parete avente pi intercapedini interne riduce fortemente il flusso termico radiativo rispetto ad una parete normale.

9.10 FORMALISMO MATRICIALE NELLA RADIAZIONE TERMICA

Vediamo qui una generalizzazione del metodo di calcolo dello scambio radiativo fra superfici non nere formanti una cavit. Nel caso di geometrie complesse occorre sempre utilizzare regole generali che possono facilmente essere applicate.
Il metodo che si espone porta a scrivere un sistema di equazioni di scambio radiativo che pupar essere facilmente risolto mediante CAD matematici oggi alla portata di tutti o con programmi appositamente predisposti.

9.10.1 CASO ESEMPIO: CAVIT FORMATA DA TRE SUPERFICI

Si consideri inizialmente una cavit radiativa formata da tre superfici, come indicato nella seguente figura.
1 2
3
Figura 133: Scambio radiativo in una cavit chiusa
Le equazioni di bilancio sono, supponendo note le superfici, i fattori di forma e le emissivit:

37 Si pensi ad una parete che funzioni da muro Trombe-Michell che si porta a temperature di alcune decine di gradi al di sopra della media delle temperature delle altre pareti di un ambiente solarizzato (vedi applicazioni bioclimatiche).

1 1 1 2 2 3
1
1 1 1 12 1 13
2 2 2 1 2 3
2
2 2 2 21 2 23
3 3 3 1 3 2
3
3 3 3 31 3 32
1 1 1
1 1 1
1 1 1
n
n
n

$E J J J J J$
$A A F A F$
$E J J J J J$
$A A F A F$
$E J J J J J$
$A A F A F$
ε
ε
ε
ε
ε
ε
□□
− − − □ = + − □
□
□
□
□ □ − − − □ = + − □
□
□
□
□ − − − = + □ − □
□□
ovvero anche:
1 1
1 12 13 1 12 2 13 3
1 1
2 2
2 21 1 21 23 2 23 3
2 2
3 3
3 31 1 32 2 31 32 3
3 3
( ) ( ) ( )
1 1
( ) ( ) ( )
1 1
( ) ( ) ( )
1 1
n
n
n
$E F F J F J F J$
$E F J F F J F J$
$E F J F J F F J$
ε ε
ε ε
ε ε
ε ε
ε ε
ε ε
□
□ = + + + − + − − − □
□□
□ = − + + + + −

− −
= − + − + + +
− −
[170]
Definiti ora le matrici e i vettori seguenti :
[ ] [ ]
1
1
1
1
2
2 2
2
3
3
3
3
1
1
1
n
n
n
E
J
E J
C J
J
E
ε
ε
ε
ε
ε
ε
−
= − =
−
[ ]
1
12 13 12 13
1
2
21 21 23 23
2
3
31 32 31 32
3
( )
1
( )

1
( )
1
$F\ F\ F\ F$
$A\ F\ F\ F\ F$
$F\ F\ F\ F$
ε
ε
ε
ε
ε
ε
$+ + - - \quad -$
$= \quad - + + - \quad -$
$- - + +$
$-$

il sistema di equazioni risulta così sintetizzabile:

$$[\ ]\ [\ ][\ ]\ [\ ]\ [\ ]\ [\ ]\ {}_1 C\ A\ J\ J\ A\ C\ {}_- = \Rightarrow = \qquad [171]$$

e quindi risolvibile con le normali regole dell'Analisi Matematica. Il metodo si estende facilmente
al caso di N superfici radiative e quindi al caso generale di cavità radiativa.

9.11 EFFETTO SERRA NEGLI EDIFICI

L'effetto serra negli edifici è generato dalla trasparenza non simmetrica dei vetri delle finestre.
In Figura 134 si hanno le curve di trasparenza per alcuni tipi di vetri.
Il vetro comune presenta una finestra fra 0,3 e 3 μm e pertanto lascia passare quasi la totalità della
radiazione solare che ha il suo massimo a 0,55 μm. La radiazione solare che penetra all'interno degli
ambienti viene da questi assorbita e contribuisce ad innalzare la temperatura di equilibrio.

0.2 1.0 2.0 3.0 μm
0
0.5
1
τ
Vetro
antisolare
Vetro
comune
Quarzo
Visibile

Figura 134: fattore di trasparenza dei vetri

Le pareti e gli oggetti interni emettono a loro volta una radiazione termica nel campo
dell'infrarosso lontano: supponendo una temperatura media di 27 °C si ha, per

la legge di Wien, una
lunghezza d’onda di massima emissione di:

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{300} \cong 10 \, \mu m$$

Ne segue che il vetro non lascia passare la radiazione infrarossa proveniente dall’interno e
quindi si ha una sorta di intrappolamento di energia all’interno degli ambienti.
Ricordando la relazione:

Potenza_Entrante - Potenza_Uscente + Potenza_Sorgenti = Accumulo_Potenza

Ne segue che se l’ambiente non disperde la potenza entrante aumenta l’accumulo e quindi cresce
la temperatura interna.
E’ proprio quello che succede in estate: la radiazione solare surriscalda gli ambienti, specialmente
quelli eccessivamente vetrati, e quindi si ha la necessità di avere un impianto che fa l’esatto opposto:
estrae il calore accumulato dagli ambienti per raffrescarli.
Le pareti vetrate per effetto della loro natura producono non solamente effetti visivi gradevoli
ma anche (e forse soprattutto) effetti notevoli sul comportamento termico generale di un edificio.
Questi componenti dovrebbero essere considerati sempre con attenzione da parte dei
progettisti perché un loro uso smodato provoca veri e propri disastri energetici.
L’uso di grandi pareti finestrate (finestre e nastro) porta ad avere forti dispersioni termiche in
inverno ed altrettanto forti rientrate di calore in estate, come sopra detto.
Inoltre l’inserimento di grandi superfici finestrate può avere conseguenze negative anche sulla
verifica dei disperdimenti termici dell’edificio ai sensi della Legge 10/91.
Le superfici vetrate, inoltre, modificano sensibilmente la temperatura media radiante dell’ambiente e
pertanto hanno influenza negativa sulle condizioni di benessere ambientale interna agli edifici.

9.12 EFFETTO SERRA NELL’ATMOSFERA TERRESTRE

Un comportamento analogo a quanto avviene negli edifici si ha nell’atmosfera terrestre per
effetto dell’assorbimento della CO_2 presente nell’aria.

Figura 135: Radiazione solare fuori dell’atmosfera e al suolo

In Figura 135 si ha lo spettro della radiazione solare a livello del mare e si può osservare come
oltre i 2,7 μm si abbia un assorbimento totale dovuto al vapore acqueo e alla CO_2.
La radiazione terrestre verso lo spazio ha una lunghezza d’onda data da:

max
2898

9.6
290
$\lambda = \cong \mu m$

e quindi si ha un blocco, del tutto simile a quello operato dal vetro.

Poich la quantit di CO_2 presente nell’atmosfera cresce con il consumo di combustibili, per effetto delle trasformazioni chimiche di ossidazione del carbonio, allora si ha un effetto serra crescente che porta ad un incremento della temperatura di equilibrio della terra.

Negli ultimi decenni si avuto un incremento di circa 1 C della temperatura media terrestre con conseguenze visibili sul clima.

10 SCAMBIATORI DI CALORE

Lo scambiatore di calore un dispositivo capace di trasferire energia termica da un corpo ad un altro. In genere lo scambio energetico effettuato mediante due fluidi di lavoro ma questa solo una disposizione impiantistica non vincolante per lo scambio termico.

Probabilmente lo scambiatore il dispositivo pi utilizzato nell’impiantistica (sia civile che industriale), nell’industria e nelle applicazioni tutte. Qualunque sia la natura dell’impianto (elettrico, elettronico, meccanico, edilizio,….) si hanno sempre scambi termici da realizzare. Un computer, ad esempio, ha notevoli problemi di smaltimento del calore generato dal riscaldamento dei suoi componenti elettronici (vedi, ad esempio, il processore centrale) che impediscono, spesso, l’ingegnerizzazione in sistemi di ridotte dimensioni.

Un getto di calcestruzzo genera calore per effetto delle reazioni di presa del cemento e se non si prevede opportunamente come smaltirlo si va incontro a seri problemi specialmente quando le dimensioni del manufatto sono non trascurabili.

Il corpo umano , in un certo senso, uno scambiatore di calore e la nostra vita regolata da precisi meccanismi di scambio termico con l’ambiente e di termoregolazione corporea. In una casa moderna si hanno innumerevoli esempi di applicazione degli scambiatori di calore: nei frigoriferi domestici, negli impianti di climatizzazione, …..Data la natura del corso si vuole qui dare un cenno alla problematica degli scambiatori di calore anche in vista di una loro utilizzazione nel corso di Impianti Termotecnici.

10.1 SCAMBIATORI DI CALORE A CORRENTI PARALLELE

Si studieranno, anche a scopo euristico, gli scambiatori a corrente parallele, cio gli scambiatori che hanno direzione di flusso parallele (tubi concentrici), vedi Figura 136, sia in modo equiverse (nella

stessa direzione) che controverso (in direzioni opposte), Figura 137.
Figura 136: Scambiatore di calore a correnti parallele equiverse
Indichiamo con t_{ic}, la temperatura di ingresso del fluido caldo (che supponiamo fluire nel del
condotto interno) e t_{uc} la temperatura di uscita del fluido caldo. Analogamente siano t_{if} e t_{uf} le
temperature di ingresso e di uscita del fluido freddo (che fluisce nel condotto esterno).
Indichiamo con m’ la portata del fluido caldo e con m’’ quella del fluido freddo. Un semplice
bilancio energetico globale fra i due fluidi, supponendo che all’esterno del condotto freddo ci sia un
isolamento termico che impedisce perdite di calore, porta a scrivere l’equazione:

$' '( ) '' ''( ) \; _{ic\, uc\, uf\, if} Q = m\ c\ t - t = \pm m\ c\ t - t$

ove vale il segno + per correnti equiverse e il segno – per correnti controverse.
Da questa equazione possibile calcolare una incognita note le altre grandezze.

Figura 137: Scambiatore di calore a correnti parallele controverse
Con riferimento alla Figura 138, per un elemento differenziale di superficie dS, dette t_c e t_f le
temperature correnti dei due fluidi di lavoro, si ha ancora il bilancio differenziale:
Figura 138: Modalit di scambio in una sezione intermedia

$dq = -c'm'dt_c = \pm c''m''dt_f$

che pu ancora scriversi nella forma:

$1\ 1$

$' '\ ''\ ''$

$_{c\, f} dt\ dt$

dq

$c\ m\ c\ m$

$= - = \pm$

Combinando il secondo e terzo membro si ottiene anche:

$( )$

$1\ 1$

$' '\ ''\ ''$

$_{c\, f} d\ t\ t\ d$

dq

M

$c\ m\ c\ m$

$- \theta$

$= - = -$

$\pm$

ove si sono posti:

$1\ 1$

$' '\ ''\ ''$

$_{c\, f} t\ t$

M
$c\ m\ c\ m$
$\theta = -$
$= \pm$
e la modalità di trasmissione del calore fra i due fluidi porta a scrivere:
$dq = KdS\left(t_c - t_f\right) = KdS\theta$
Eguagliando le due espressioni di dq si ottiene l’equazione differenziale:
d
KdS
M
$-\theta = \theta$
Supponendo costanti i coefficienti (cioè le proprietà termofisiche e la trasmittanza termica K) si
ha un’equazione differenziale a variabili separabili che risolta, tenuto conto delle condizioni iniziali
$_{i\ ic\ if}\theta = t - t$ e $_{u\ uc\ uf}\theta = t - t$, porta alla soluzione:
KMS
$_i\theta = \theta\ e^{-}$
ove S è la superficie totale di scambio termico.
Figura 139: Distribuzione della differenza di temperatura per correnti equiverse
Questa equazione ci dice che la distribuzione della differenza di temperatura all’interno dello
scambiatore è esponenziale ed ha andamenti che dipendono dal verso di flusso. In Figura 139 si ha la
distribuzione per flussi equiversi.
Si osservi che la differenza di temperatura è massima nella sezione di ingresso ed è minima nella
sezione di uscita di entrambi i fluidi. Ciò penalizza il funzionamento dello scambiatore poiché a grandi
differenze di temperature si hanno anche grandi irreversibilità del sistema.
Quando si esamina il caso di scambio in controcorrente allora si ha:
$1\ 1$
$'\ '\ ''\ ''$
M
$c\ m\ c\ m$
$= -$
Ciò significa che M può assumere valori positivi (c’m ’< c’’m’’), negativi (c’m’ > c’’m’’) e nulli
(c’m’=c’’m’’).
I tre casi sono riportati in Figura 140 (M>0), Figura 141 (M<0) e in Figura 142 (M=0).

Figura 140: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con M>0
Figura 141: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con M<0
So osservi che quando si ha M=0 le curve degenerano in due rette con θ = costante.
I prodotti c’m’ e c’’m’’ sono detti capacità termiche di flusso del fluido caldo e del fluido freddo,

rispettivamente.
Si osserva immediatamente che, nel caso di scambio in controcorrente, le differenze di
temperatura fra i due fluidi si mantengono mediamente inferiori al caso di scambio in equicorrente.
Pertanto le irreversibilit prodotte dagli scambiatori in controcorrente sono minori di quelli in
equicorrente, ovvero si hanno modalit di scambio migliori.
Ricordando l’equazione globale di scambio termico e le posizioni sin qui fatte si pu ancora
scrivere:

' '( ) " "( ) $_{i\ u}$
$_{ic\ uc\ uf\ if}$ $Q\ m\ c\ t\ t\ m\ c\ t\ t$
M
$= - = \pm - = -\theta - \theta$

Se ricaviamo M dall’equazione di distribuzione di temperatura si ha anche:

ln
$_{i\ u}$
$_{i}$
$_{u}$
$Q\ KS$
$\theta\ \theta$
θ
θ
$= -$

Figura 142: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con M=0

Si suole porre:

ln
$_{i\ u}$
$_{ml}$
$_{i}$
$_{u}$
T
$\theta\ \theta$
θ
θ
$\Delta = -$

e quindi il calore scambiato si pu scrivere nella forma:

$_{ml}$ $Q = KS\Delta T$

10.2 EFFICIENZA DEGLI SCAMBIATORI

Possiamo definire efficienza di una scambiatore di calore il seguente rapporto:

Calore Effettivamente Scambiato
CaloreMassimo Scambiabile
$\eta =$

Il calore massimo che pu essere scambiato si ha quando la superficie di scambio termico tende
ad infinito. L’esame dei diagrammi sulle distribuzioni di temperature mostra che, al tendere di
$S \to \infty$ una delle temperature dei due fluidi tende ad eguagliare quella corrispondente dell’altro fluido.

Ad esempio per l’equicorrente, Figura 139, al tendere ad infinito di S le due temperature di uscita
dei fluidi tendono ad eguagliarsi: $t_{uc}=t_{uf}$. Pertanto l’efficienza di scambio per correnti equiverse diviene:

( )
( )
' '
' '
ic uc
ic uf
c m t t
c m t t
ε
–
=
–

Nel caso di correnti controverse si hanno tre casi (a seconda del segno di M).
M>0 cio□ c’m’ < c’’m’’
Allora il fluido caldo ha minore capacit□ termica di flusso del fluido freddo. Al tendere all’infinito
della superficie la temperatura di uscita del fluido caldo tende a quella di ingresso del fluidi freddo.
L’efficienza diviene:

( )
( )
' '
' '
ic uc
ic if
c m t t
c m t t
ε
–
=
–

M<0 cio□ c’m’ > c’’m’’
Il fluido freddo ha minore capacit□ termica di flusso del fluido caldo. Al tendere all’infinito della
superficie la temperatura di uscita del fluido freddo tende a quella di ingresso del fluidi caldo.
L’efficienza diviene:

( )
( )
" "
" "
uf if
ic if
c m t t
c m t t

ε
–
=
–
M=0 cio c’m’ = c’’m’’
In questo caso si ha un caso limite: i due fluidi hanno eguali capacit termiche di flusso e
l’efficienza si calcola indifferentemente con una delle due relazioni sopra viste.
10.2.1 FORMA UNIFICATA DELL’EFFICIENZA DI SCAMBIO TERMICO
Dalle due ultime relazioni si osserva che, indicando con C_{min} la minore delle due capacit termiche
di flusso, l’efficienza di scambio termico data dal rapporto:
C_{min}
ic if
t
t t
ε
Δ
=
–
cio a numeratore si ha la differenza di temperatura, in valore assoluto, del fluido di minore
capacit termica e a denominatore si ha sempre la differenza fra le temperature di ingresso del fluido
caldo e del fluido freddo. Il significato dell’efficienza di scambio termico appare evidente da quanto
sopra detto: al crescere dell’efficienza crescono anche le dimensioni dello scambiatore e con esse il
costo. Pertanto nella pratica si utilizzano scambiatori di calore che ottimizzano l’efficienza e il costo.
Ad esempio un valore tipico η=0.80. Valori pi elevati comportano incrementi di costi notevoli
mentre valori inferiori portano ad avere scambiatori pi economici.
Oltre al valore economico sopra evidenziato l’efficienza ha ha un significato termodinamico
importante. Se l’efficienza bassa si hanno anche forti differenze di temperature fra i due fluidi e quindi
anche forti irreversibilit di scambio.
Per contro, un valore elevato dell’efficienza comporta minori differenze di temperature e quindi
una minore produzione di irreversibilit termica. Se si avesse (al limite) η=1 si avrebbero differenze di
temperature nulle (forma indeterminata per η) e quindi si raggiungerebbe la condizione ideale di
scambio termico isotermo.

10.3 PROGETTO DI UNO SCAMBIATORE DI CALORE

Il progetto di uno scambiatore di calore pu essere fatto in due modi principali dei quali si darpar un rapido cenno nel prosieguo. L’Allievo tenga presente che Egli dovr utilizzare gli scambiatori nel
corso di Impianti e pertanto la fase di progetto demandata agli specialisti del settore.

10.3.1 METODO DELLE DIFFERENZE MEDIE LOGARITMICHE

E’ questo il metodo pi antico. Si utilizza la relazione gi indicata in
precedenza:
ln
$i\ u$
i
u
$Q\ KS$
$\theta\ \theta$
θ
θ
$= -$
Pertanto, se si conoscono le differenze di temperatura fra i due fluidi e il flusso termico
scambiato $' '(\ )\ ''\ ''(\ )$ $_{ic\ uc\ uf\ if}Q = m\ c\ t - t = \pm m\ c\ t - t$ allora si pu ricavare la superficie di scambio S.
Le cose sono, nella realt, pi complesse perch il calcolo di K richiede la conoscenza di alcuni
parametri geometrici (diametri dei tubi, come si evince dal 1.2.2).

Pertanto il progetto procede per tentativi assegnando i diametri e calcolando la lunghezza dei
condotti ($S=\pi dL$).
Se nota la superficie di scambio, S, le precedenti relazioni consentono di calcolare una delle
quattro temperature.
Si osservi che si sono esaminati solamente i casi di fluidi in condizioni di scambio termico
normale e si sono trascurati i casi di scambio termico con cambiamento di fase (vaporizzazione o
condensazione) di uno o entrambi i fluidi.
Si rimanda l’Allievo ai Manuali specializzati per le applicazioni pi particolari.

10.4 SCAMBIATORI CON GEOMETRIA COMPLESSA

Nella pratica l’utilizzo degli scambiatori a correnti parallele sin qui studiati reso difficile da una
serie di motivi tecnici.
Quasi sempre si utilizzano geometrie pi complesse che consentono di sfruttare meglio gli spazi,
come indicato in Figura 143 per correnti incrociate (vedi percorso tratteggiato).
Figura 143: Scambiatore a corrente incrociate del tipo shell and tube
Lo studio analitico di queste geometrie risulta complesso ed al di fuori degli scopi del presente
capitolo.
Si dir, tuttavia, che per la progettazione si procede in modo semplificato utilizzando la relazione:
$Q = KS\Delta T_{ml} F$
ove F un fattore che dipende dalla geometrica dello scambiatore e dalle temperature dei fluidi di
lavoro.
Opportune relazioni pratiche o diagrammi sono fornite dai costruttori in manuali specializzati.
Si osserva, per, che la geometria pi efficiente quella a corrente parallele in

controcorrente.
Le altre geometrie commerciali pongono vantaggi pratici (migliore ingegnerizzazione dei sistemi) ma non termodinamici.

Figura 144: Fascio tubiero estratto da uno scambiatore di calore

10.5 METODO NTU: UNITÀ DI TRASFERIMENTO TERMICO

Da qualche decennio ha preso campo una nuova metodologia di progetto e verifica degli scambiatori di calore basata sul metodo detto NTU (Number Transfer Unit) ovvero Unità di Traferimento Termico. Si definisce, infatti, NTU il rapporto:

$$NTU = \frac{KS}{(cm)_{min}}$$

con il simbolismo già visto in precedenza. Esso ha un significato fisico ben preciso: possiamo scrivere, infatti:

$$NTU = \frac{KS \cdot 1}{(cm)_{min} \cdot 1}$$

e quindi l'NTU è il rapporto fra il calore scambiato, con salto termico $\Delta T=1$, mediante scambio termico, $KS\Delta T$, e trasportato dal fluido, $(cm)_{min}\Delta T$.

A seconda delle geometrie utilizzate si pone l'efficienza η in funzione di NTU , di un parametro geometrico e del rapporto fra le capacità termiche di flusso $c'm'/c''m''$.

Oltre che relazioni analitiche si hanno anche grafici, vedi Figura 145 e in Figura 146, che consentono di effettuare facilmente i calcoli.

Di solito in fase di progetto, fissata la geometria e il rapporto fra le capacità termico di flusso, scelta l'efficienza (ad esempio $\eta=0.8$) si determina dai grafici NTU e dalla sua definizione si calcola S.

Il metodo NTU consente di effettuare facilmente anche le verifiche termiche: dato lo scambiatore di superficie S e note le capacità termiche di flusso si calcola NTU e quindi si ha l'efficienza η.Dalla definizione dell'efficienza si calcola la temperatura incognita desiderata.

Figura 145: Curve (ε ,NTU) per assegnata geometria

Figura 146: Curve ε - NTU per alcuni tipi di scambiatori di calore

BIBLIOGRAFIA
1. G. CAMMARATA: “Fisica Tecnica Ambientale”, Dispense A.A. 2001/2002, Facolt di
Architettura, Siracusa.
2. G. CAMMARATA: “Impianti Termotecnici” Vol. 1 ÷ 4, Dispense A.A. 2004/2005, Facolt di
Ingegneria di Catania.
3. G. CAMMARATA: “Impianti Tecnici Edili” Vol. 1 e 2, Dispense A.A. 2004/2005, Facolt di
Architettura, Siracusa.
4. G. CAMMARATA: “Climatologia dell’ambiente costruito”, Vol. I e II, Dispense A.A. 1999/2000,
Facolt di Architettura, Siracusa.
5. G. CAMMARATA: “Flat Plate collectors”, Liguori Editore, Napoli, 1981
6. Y. A. CENGEL: “Termodinamica e Trasmissione del Calore”, Mc. Graw Hill, 1998
7. A. SELLERIO: “Fisica Tecnica”, Vol. I e II, Ed. Pezzino, Palermo
8. A. CAVALLINI, M. SOVRANO: “Gasdinamica”, Patron Editore, Padova
9. A BONACINA - A CAVALLINI – L MATTAROLO: “Trasmissione del Calore”. CLEUP.
Padova
10. GUGLIELMINI - PISONI : “Elementi di Trasmissione del Calore “. Ed. VESCHI
11. MASTRULLO – MAZZEI - NASO - VANOLI: Fondamenti di trasmissione del calore. Ed.
Liguori Napoli. Vol. 1 per la teoria e Vol. 2 per le esercitazioni.
12. L. C. THOMAS: Fundamentals of heat transfer . Ed. Prentice Hall Inc.
13. M JACOB: "Heat Transfer", Vol. 1, N.Y., 1949.
14. A. SACCHI – G.CAGLIERIS : Climatizzazione, UTET 1977
15. A. BADAGLIACCA: Fondamenti di trasmissione del calore, Aracne, 1997
16. J.A. DUFFIE – W.A. BECKMAN : Solar Engineering of thermal processes, J. Wiley, 1991
17. ASHRAE: "Fundamentals", cap. 26. 1981 e seguenti: 1985,1989,1993
18. AICARR: “Mini Guida CARR”, Vol 1, Milano 1998

INDICE GENERALE
1 INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE 1
Conduzione Termica 1
Convezione Termica 1
Irraggiamento Termico 1
1.1 CONDUZIONE IN UNA PARETE PIANA 2
1.1.1 LA CONDUCIBILITÀ TERMICA 2
1.2 EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE 4
Condizione del 1° tipo (di Dirichlet:) 5
Condizione del 2° tipo (di Neumann) 5
Condizione del terzo tipo 5
Condizione del quarto tipo: 6
1.2.1 PARETE PIANA 6
1.2.2 CONDUZIONE DEL CALORE IN UNO STRATO CILINDRICO 7

1.2.3 RAGGIO CRITICO 8
1.2.4 CONCETTO DI RESISTENZA TERMICA PER CONDUZIONE 9
1.2.5 CONDUZIONE TERMICA NEI MATERIALI IN SERIE E IN PARALLELO 10
1.2.6 PARETE PIANA CON SORGENTE DI CALORE INTERNA 11
1.2.7 CONDUZIONE STAZIONARI BIDIMENSIONALE 12
1.2.8 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE 14
1.2.9 TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO DI UN CORPO A RESISTENZA TERMICA TRASCURABILE. 14
1.2.10 REGIME VARIABILE IN UNA LASTRA PIANA INDEFINITA 16
1.2.11 TRANSITORIO TERMICO IN UN MEZZO SEMINFINITO 18
Temperatura alla superficie imposta 18
Flusso alla superficie imposto 19
1.2.12 REGIME PERIODICO STABILIZZATO 20
2 METODI AVANZATI PER LA CONDUZIONE TERMICA 25
2.1 METODO INTEGRALE 25
2.2 METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE 28
2.2.1 DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE 28
2.2.2 APPLICAZIONE AL CASO DELLA PARETE PIANA 32
2.2.3 APPLICAZIONE ALLO STRATO SEMINFINITO 33
2.3 USO DELLE FUNZIONI ORTOGONALI DI STURM - LIOUVILLE 34
3 METODI NUMERICI PER LA CONDUZIONE 38
3.1 METODI ALLE DIFFERENZE FINITE 38
3.2 DIFFERENZE FINITE NELLA CONDUZIONE STAZIONARIA 40
3.3 FORMULAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO 42
3.4 CONDUZIONE STAZIONARIA CON SORGENTI DI CALORE 43
3.5 CONDUZIONE STAZIONARIA IN GEOMETRIA CILINDRICA 43
3.6 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE MONODIMENSIONALE 45
3.7 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE BIDIMENSIONALE 46
3.8 METODO GRAFICO DI BINDER SMITH 46
3.9 USO DEI CODICI DI CALCOLO 47
Distribuzione di temperatura in un isolatore contenente due tubi di acqua calda 49

4 ALETTE 51
4.1 BARRA INFINITAMENTE LUNGA 52
4.2 SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA 53
4.3 SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE) 53
4.4 EFFICIENZA DELLE ALETTE 54
4.5 PARETE ALETTATA 55
4.6 ALETTE ANULARI 55
4.7 PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE 57
4.8 APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE 58
5 LA CONVEZIONE TERMICA 60
Convezione termica naturale: 60
Convezione forzata 60
Convezione termica confinata 61
Convezione termica aperta 61
5.1 EQUAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA 61
5.2 RESISTENZA TERMICA PER CONVEZIONE 63
5.3 TRASMITTANZA TERMICA 63
5.4 LE EQUAZIONI FONDAMENTALI PER LA CONVEZIONE 64
5.4.1 CONSERVAZIONE DELLA MASSA 64
5.4.2 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA 65
5.4.3 EQUAZIONE DELL'ENTROPIA PER SISTEMI APERTI 67
5.4.4 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO 67
5.5 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE 68
5.5.1 IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE TERMICA 70

5.5.2 I PARAMETRI DI SIMILITUDINE 70
5.5.3 ANALISI ADIMESIONALE PER LA CONVEZIONE FORZATA 72
5.6 CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO 73
5.6.1 NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA 75
5.6.2 LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTA 76
5.6.3 LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTA 77
5.7 PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ 78
5.8 PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA 80
5.9 ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA 82
5.9.1 ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA 82
5.10 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE 83
5.11 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO 85
5.11.1 ANALOGIA DI COLBURN 86
5.11.2 LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO 87
5.12 SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA 87
5.12.1 STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE 88
5.13 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA 90
5.14 CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI 92
5.14.1 CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE 95
5.15 CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO 96
5.15.1 CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO 98
5.16 SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI 99
5.16.1 ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA 100
Determinazione delle proprietà termofisiche 100
Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl 100
Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu 100
Calcolo del flusso termico 100
Calcolo degli sforzi di attrito 101

6 CONVEZIONE NATURALE 102
Equazione di continuità 102
Equazione della quantità di moto 102
Equazione dell'energia 104
6.1 ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE 104
6.1.1 ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE 106
6.1.2 PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO 107
6.1.3 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE 108
6.1.4 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO 109
6.1.5 CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA 109
6.1.6 FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE 110
6.1.7 CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE 111
6.2 CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGHI 112
6.3 CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE 112
6.3.1 CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO 114
6.4 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE 115
6.5 GETTI E PENNACCHI 116
7 METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD) 119
7.1 LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA 119
7.2 LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD) 119
7.3 MODELLO AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSITÀ TURBOLENTA 125
7.4 MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K-ε) 128
7.5 FONDAMENTI DELLA "*LARGE EDDY SIMULATION* (*LES*)" 130
7.6 ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER 133
7.6.1 COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA 134
7.6.2 EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTORNO 135

7.6.3 LA MESH DEL MODELLO 138
7.6.4 SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA 140
7.6.5 PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO 140
8 EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI 146
8.1 EBOLLIZIONE STATICA 146
8.2 CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE 153
8.3 EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO 153
8.4 LA CONDENSAZIONE 160
8.5 I TUBI DI CALORE (*HEAT PIPE*) 163
9 L'IRRAGGIAMENTO 165
9.1 UNITÀ DI MISURA PER L'IRRAGGIAMENTO 166
9.1.1 EMISSIONE MONOCROMATICA 166
9.1.2 EMISSIONE GLOBALE 167
9.1.3 INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA 167
9.1.4 INTENSITÀ DI EMISSIONE GLOBALE 167
9.2 EMSISSIONE EMISFERICA 167
9.3 IL CORPO NERO 168
9.4 EMISSIVITÀ SPECIFICA 169
9.4.1 LEGGE DI KIRCHHOFF 172

9.5 I CORPI NON GRIGI 172
9.6 CONCETTO DI FATTORE DI FORMA 173
9.6.1 ADDITIVITÀ DEI FATTORI DI FORMA 174
Esempio di calcolo dei fattori di forma 175
9.7 PRINCIPIO DELLA SFERA UNITARIA 176
9.8 METODO DELLA RADIOSITÀ 177
9.9 CASO DELLE DUE SORGENTI CONCAVE 179
9.9.1 SUPERFICI *FINITE* PIANE E PARALLELE 182
9.9.2 SUPERFICI *INFINITE* PIANE E PARALLELE 183
9.9.3 SFERE O CILINDRI CONCENTRICI 183
9.9.4 PARETE CHE IRRADIA VERSO IL CIELO 184
9.9.5 SCHERMI RADIATIVI 184
9.10 FORMALISMO MATRICIALE NELLA RADIAZIONE TERMICA 185
9.10.1 CASO ESEMPIO: CAVITÀ FORMATA DA TRE SUPERFICI 185
9.11 EFFETTO SERRA NEGLI EDIFICI 187
9.12 EFFETTO SERRA NELL'ATMOSFERA TERRESTRE 188
10 SCAMBIATORI DI CALORE 189
10.1 SCAMBIATORI DI CALORE A CORRENTI PARALLELE 189
10.2 EFFICIENZA DEGLI SCAMBIATORI 193
M>0 cioè c'm' < c''m'' 193
M<0 cioè c'm' > c''m'' 194
M=0 cioè c'm' = c''m'' 194
10.2.1 FORMA UNIFICATA DELL'EFFICIENZA DI SCAMBIO TERMICO 194
10.3 PROGETTO DI UNO SCAMBIATORE DI CALORE 194
10.3.1 METODO DELLE DIFFERENZE MEDIE LOGARITMICHE 194
10.4 SCAMBIATORI CON GEOMETRIA COMPLESSA 195
10.5 METODO NTU: UNITÀ DI TRASFERIMENTO TERMICO 196

INDICE DELLE FIGURE

FIGURA 1: POSTULATO DI FOURIER PER LA CONDUZIONE. 3
FIGURA 2: PARETE PIANA INDEFINITA 6
FIGURA 3: TRASMISSIONE PER CONDUZIONE IN UN MANICOTTO CILINDRICO 8
FIGURA 4: CONDOTTO CILINDRICO ISOLATO 8
FIGURA 5: ANDAMENTO DELLE RESISTENZA 9
FIGURA 6: MODALITÀ DI TRASMISSIONE PER CONDUZIONE IN SERIE E IN

PARALLELO 10
FIGURA 7: STRATO PIANO MONODIMENSIONALE CON SORGENTE INTERNA 11
FIGURA 8: STRATO PIANO BIDIMENSIONALE 12
FIGURA 9: ANDAMENTO DEL TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E/O DI RAFFREDDAMENTO 15
FIGURA 10: LASTRA PIANA INDEFINITA 16
FIGURA 11: STRATO SEMINFINITO—DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA ISTANTANEA 19
FIGURA 12: ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA IN UNO STRATO SEMINFINITO CON T IMPOSTA 19
FIGURA 13: VARIAZIONE PERIODICA DI TEMPERATURA IN UNO STRATO SEMINFINITO 21
FIGURA 14: ANDAMENTO DELLE OSCILLAZIONI ALL'INTERNO DELLO STRATO 23
FIGURA 15: STRATO PIANO SEMINFINITO 25
FIGURA 16: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_0(X)$ 35
FIGURA 17: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_1(X)$ 35
FIGURA 18: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_0(\sqrt{X})$ 36
FIGURA 19: GRAFICO DELLA FUNZIONE $Y_0(X)$ 36
FIGURA 20: GRAFICO DELLA FUNZIONE $Y_1(X)$ 36
FIGURA 21: GRAFICO DELLA FUNZIONE $I_0(X)$ E $I_0(X)$ 37
FIGURA 22: GRAFICO DELLA FUNZIONE $K_0(X)$ E $K_1(X)$ 37
FIGURA 23: RETICOLO PIANO PER IL METODO ALLE DIFFERENZE FINITE 40
FIGURA 24: CONDIZIONE AL CONTORNO DEL TERZO TIPO – CONVEZIONE ESTERNA 44
FIGURA 25: COSTRUZIONE GRAFICA DI BINDER – SMITH 47
FIGURA 26: FORMAZIONE DELLA GRIGLIA DI CALCOLO PER L'ESEMPIO CONSIDERATO 49
FIGURA 27: CURVE ISOTERME PER L'ESEMPIO ANALIZZATO 49
FIGURA 28: DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELLA TEMPERATURA 50
FIGURA 29: DISTRIBUZIONE DEL FLUSSO 50
FIGURA 30: SCHEMATIZZAZIONE DI UNA ALETTA 51
FIGURA 31: EFFICIENZA DI UNA ALETTA RETTANGOLARE 54
FIGURA 32: EFFICIENZA DI UNA ALETTA RETTANGOLARE CON SOLUZIONE ESATTA 55
FIGURA 33: RAPPRESENTAZIONE DI UNA ALETTA CIRCOLARE DI SPESSORE COSTANTE 56
FIGURA 34: DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA NELLE ALETTE CILINDRICHE 57
FIGURA 35: EFFICIENZA ALETTE ANULARI 57
FIGURA 36: PROFILO RETTANGOLARE, IPERBOLICO E TRIANGOLARE 58
FIGURA 37: GRIGLIA DI CALCOLO 58
FIGURA 38: DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA IN UNA FLANGIA 59
FIGURA 39. DISTRIBUZIONE DEL FLUSSO PER UN TUBO FLANGIATO 59
FIGURA 40: FORMAZIONE DELLO STRATO LIMITE DINAMICO SOPRA UNA LASTRA PIANA 60
FIGURA 41: SCHEMATIZZAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA FRA PARETE E FLUIDO 62
FIGURA 42: TRASMISSIONE DEL CALORE FRA DUE FLUIDI SEPARATI DA UNA PARETE COMPOSTA. 64
FIGURA 43: SISTEMA APERTO CON FLUSSI LOCALIZZATI 65
FIGURA 44: PROFILI DI VELOCITÀ NELLO STRATO LIMITE SOPRA UNA LASTRA PIANA 69
FIGURA 45: PENNACCHIO ORIGINATO DA UN FOCOLARE IN BASSO 75

FIGURA 46: LUNGHEZZA DI MESCOLAMENTO TERMICA 77
FIGURA 47: SCAMBIO DI QUANTITÀ DI MOTO E DI ENERGIA FRA PARTICELLE IN MOTO TURBOLENTO
79
FIGURA 48: PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ 80
FIGURA 49: PROFILI DI VELOCITÀ E DI TEMPERATURA PER MOTO SU LASTRA PIANA RISCALDATA 81
FIGURA 50: PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA 81
FIGURA 51: SIMILITUDINE DEI PROFILI DI VELOCITÀ 84
FIGURA 52: DEFLUSSO SOPRA SUPERFICI CILINDRICHE 88
FIGURA 53: FATTORE DI DRAG 88
FIGURA 54: NUMERO LOCALE DI NUSSELT 89
FIGURA 55: F E Z PER PASSO QUADRATO 89
FIGURA 56: F E Z PER PASSO TRIANGOLARE 90

FIGURA 57: STRATO LIMITE DINAMICO IN UN CONDOTTO CIRCOLARE 92
FIGURA 58: CALCOLO DEL DIAMETRO EQUIVALENTE PER UNO SCAMBIATORE DI CALORE 96
FIGURA 59: DIAMETRO EQUIVALENTE PER CONDOTTI RETTANGOLARI 96
FIGURA 60: CONVEZIONE NATURALE CON LASTRA PIANA VERTICALE 103
FIGURA 61: CONVEZIONE NATURALE IN UNA CAVITÀ CHIUSA 113
FIGURA 62: CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO (CELLE DI BÈNARD) 114
FIGURA 63: FORMAZIONE DEL GETTO (ZONA TURBOLENTA) 117
FIGURA 64: FORMAZIONE DI UN PENNACCHIO 118
FIGURA 65: FORMAZIONE DI UN PENNACCHIO IN UNA TORCIA DI RAFFINERIA 118
FIGURA 66: SCHEMA DELLA MODELLIZZAZIONE FLUIDODINAMICA 120
FIGURA 67: APPLICAZIONE DELLE IPOTESI SPAZIALI E TEMPORALI AL MODELLO CFD 122
FIGURA 68: GERARCHIA DEI MODELLI DI SIMULAZIONE 124
FIGURA 69: LE TRE BANDE CARATTERISTICHE DELLO SPETTRO D'ENERGIA DELLA TURBOLENZA:
SCALE ENERGETICHE, INERZIALI E DISSIPATIVE 131
FIGURA 70: STRATO LIMITE TURBOLENTO IN LARGE EDDY SIMULATION 132
FIGURA 71: FINESTRA INIZIALE FEMLAB 134
FIGURA 72: MODELLAZIONE GEOMETRICA DELLO SWIRLER 134
FIGURA 73: GEOMETRIA COMPLETA DEL SISTEMA STUDIATO 135
FIGURA 74: FINESTRA DI SELEZIONE DEI SOTTOMODULI DI RISOLUZIONE 136
FIGURA 75: FINESTRA PER IL SETTAGGIO DEI SOTTODOMINI 137
FIGURA 76: FINESTRA PER IL SETTAGGIO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO 138
FIGURA 77: FINESTRA DI SETTAGGIO PER I PARAMETRI DELLA MESH 138
FIGURA 78: MESH DEL MODELLO 139
FIGURA 79: INGRANDIMENTO DELLA MESH NELLA ZONA DELLO SWIRLER 139
FIGURA 80: FINESTRA DI GESTIONE DEL SOLUTORE 140
FIGURA 81: PIANI DI SEZIONE: CAMPO DI VELOCITÀ 141
FIGURA 82: SEZIONE LONGITUDINALE DEL MODELLO 141
FIGURA 83: LINEE DI FLUSSO 142
FIGURA 84: VETTORI VELOCITÀ 142
FIGURA 85A: INGRANDIMENTO DELLA ZONA DI FORMAZIONE DEL VORTICE(POSTERIORE) 143
FIGURA 86: DISTRIBUZIONE RADIALE DELLA COMPONENTE ASSIALE DELLA VELOCITÀ ALL’USCITA
DEL BRUCIATORE 144

FIGURA 87: DISTRIBUZIONE RADIALE DELLA COMPONENTE ASSIALE DELLA VELOCITÀ A 20 CM
DALLA SEZIONE D'USCITA DEL BRUCIATORE 145
FIGURA 88: DISTRIBUZIONE DELLA PRESSIONE ALL'USCITA DEL BRUCIATORE 145
FIGURA 89: CURVA DI NUKIJAMA 147
FIGURA 90: NASCITA DI UNA BOLLA DI VAPORE 148
FIGURA 91: IMPLOSIONE DELLA BOLLA 148
FIGURA 92: SCOPPIO DELLA BOLLA 149
FIGURA 93: DISTACCO DELLE BOLLE 149
FIGURA 94: EQUILIBRIO TERMODINAMICO DELLA BOLLA 149
FIGURA 95: IMPLOSIONE DELLA BOLLA DISTACCATA 151
FIGURA 96: FORMAZIONE DI COLONNE DI BOLLE 152
FIGURA 97: FORMAZIONE DI UNO STRATO DI VAPORE SULLA PARETE DI FONDO 152
FIGURA 98: SEQUENZA DI EBOLLIZIONE NUCLEATA STATICA ATTORNO AD UN FILO CALDO 154
FIGURA 99: SEQUENZA DELLE FASI DI IMPLOSIONE DI UNA BOLLA COMPLETA 155
FIGURA 100: CURVA DI NUKIJAMA PER EBOLLIZIONE DINAMICA (α È IL COEFFICIENTE DI
CONVEZIONE) 156
FIGURA 101: EBOLLIZIONE DINAMICA 156
FIGURA 102: DISTRIBUZIONE DI TEMPERATURA LUNGO UN TUBO BOLLITORE 157
FIGURA 103: TIPO DI MOTO IN UN TUBO BOLLITORE ORIZZONTALE 158
FIGURA 104: DIAGRAMMA A ZONE PER IL TIPO DI MOTO 158
FIGURA 105: FATTORE DI CORREZIONE F 159
FIGURA 106: FATTORE DI CORREZIONE S 160
FIGURA 107: FORMAZIONE DEL FILM DI CONDENSATO 160
FIGURA 108: SCHEMATIZZAZIONE DEL TUBO DI CALORE 163
FIGURA 109: SEZIONE DI UN COLLETTORE SOLARE A TUBO DI CALORE 164
FIGURA 110: TIPOLOGIA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE AL VARIARE DELLA LUNGHEZZA
D'ONDA 165
FIGURA 111: INTERAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE CON LA MATERIA 166
FIGURA 112: INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA 167
FIGURA 113: EMISSIONE EMISFERICA 168

FIGURA 114: CURVE DI EMISSIONE DI PLANCK PER CORPO NERO A VARIE TEMPERATURE. 170
FIGURA 115: TIPOLOGIE DI EMISSIONI RADIATIVE 171
FIGURA 116: ANDAMENTO DI ε PER CORPI NERI, GRIGI E REALI. 171
FIGURA 117: ANDAMENTO DELL'EMISSIONE MONOCROMATICA PER CORPI NERI, GRIGI E REALI. 171
FIGURA 118: SCAMBIO RADIATIVO FRA CORPI NERI (FATTORE DI FORMA) 173
FIGURA 119: ADDITIVITÀ DEI FATTORI DI FORMA 175
FIGURA 120: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI PIANE (PARETI D'ANGOLO) 175
FIGURA 121: VERIFICA DELL'ILLUMINAMENTO DIURNO IN UN PUNTO INTERNO DI UNA SALA 176
FIGURA 122: APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI LAGRANGE 177
FIGURA 123: METODO DELLA RADIOSITÀ 179
FIGURA 124: FATTORI DI FORMA PER CASI ELEMENTARI 180
FIGURA 125: RETE EQUIVALENTE ALLO SCAMBIO RADIATIVO 181

FIGURA 126: SCHEMA DI SCAMBIO RADIATIVO FRA DUE SUPERFICI FORMANTI UNA CAVITÀ 181
FIGURA 127: RETE ELETTRICA EQUIVALENTE 182
FIGURA 128: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI FINITE PIANE E PARALLELE. 182
FIGURA 129: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI INFINITE PIANE E PARALLELE. 183
FIGURA 130: SCAMBIO RADIATIVO FRA SFERE E CILINDRI CONCENTRICI 183
FIGURA 131: SCAMBIO RADIATIVO FRA PARETE E VOLTA CELESTE. 184
FIGURA 132: SCHERMO RADIATIVO INTERPOSTO FRA DUE SUPERFICI RADIANTI. 185
FIGURA 133: SCAMBIO RADIATIVO IN UNA CAVITÀ CHIUSA 185
FIGURA 134: FATTORE DI TRASPARENZA DEI VETRI 187
FIGURA 135: RADIAZIONE SOLARE FUORI DELL'ATMOSFERA E AL SUOLO 188
FIGURA 136: SCAMBIATORE DI CALORE A CORRENTI PARALLELE EQUIVERSE 189
FIGURA 137: SCAMBIATORE DI CALORE A CORRENTI PARALLELE CONTROVERSE 190
FIGURA 138: MODALITÀ DI SCAMBIO IN UNA SEZIONE INTERMEDIA 190
FIGURA 139: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CORRENTI EQUIVERSE 191
FIGURA 140: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON
M>0 192
FIGURA 141: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON
M<0 192
FIGURA 142: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON
M=0 193
FIGURA 143: SCAMBIATORE A CORRENTE INCROCIATE DEL TIPO SHELL AND TUBE 195
FIGURA 144: FASCIO TUBIERO ESTRATTO DA UNO SCAMBIATORE DI CALORE 196
FIGURA 145: CURVE (ε,NTU) PER ASSEGNATA GEOMETRIA 197
FIGURA 146: CURVE ε - NTU PER ALCUNI TIPI DI SCAMBIATORI DI CALORE 198

INDICE DELLE TABELLE

TABELLA 1: CONDUCIBILITÀ DI ALCUNI MATERIALI 3
TABELLA 2: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 1° 29
TABELLA 3: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 2° 30
TABELLA 4: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 3° 31
TABELLA 5: CONDIZIONE AL CONTORNO PER CONDUZIONE STAZIONARIA 44
TABELLA 6: ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA 82
TABELLA 7: SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI BLASIUS 85
TABELLA 8: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA 90
TABELLA 9: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA 91
TABELLA 10: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA 91
TABELLA 11: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA 92
TABELLA 12: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA 94
TABELLA 13: NUMERI DI NUSSELT PER VARIE TIPOLOGIE DI CONDOTTI 97
TABELLA 14: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE 115
TABELLA 15: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE 115
TABELLA 16: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE 116
TABELLA 17: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE 116
TABELLA 18: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE 116