APPUNTI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Anno Accademico 2004-2005

Indice

Capitolo 1

TRAVATURE PIANE

1.1 Geometria, equilibrio e vincoli

Molte delle strutture di interesse nel campo dell’ingegneria civile e meccanica nascono dall’assemblaggio di elementi ‘trave’, ciascuno dei quali è caratterizzato dall’avere una dimensione predominante rispetto alle altre due. Lo studio di tali elementi può svolgersi attraverso diversi tipi di modellazione matematica, la più conveniente delle quali dipende sempre dal problema in esame e dal tipo di informazioni che si vuole ottenere.

Per conoscere direttamente lo stato di deformazione e tensione in ogni punto della trave bisogna utilizzare un modello continuo tridimensionale. Dal punto di vista geometrico un modello tridimensionale di trave a sezione costante può ottentersi pensando ad una figura piana, detta ‘sezione retta’, ‘sezione trasversale’ o anche solo ‘sezione’, che si muove rigidamente nello spazio mantenendosi sempre ortogonale alla traiettoria seguita dal suo baricentro. La traiettoria definisce una curva dello spazio detta ‘asse’ della trave caratterizzata da una lunghezza e, in ogni punto, da un raggio di curvatura che si suppone siano sensibilmente maggiori delle dimensioni massime della sezione retta (figura 1.1.a).

Per lo studio di assemblaggi strutturali di più elementi trave, detti anche ‘travature’, è invece spesso conveniente ‘in prima battuta’ modellare matematicamente ciascuno di essi come un elemento monodimensionale definito geometricamente dall’asse della trave e, per ciascun punto di esso, da grandezze geometriche quali l’area e i momenti d’inerzia della sezione retta. Si vedrà che un tale tipo di modellazione fornisce in ogni punto dell’asse informazioni mediate sull’intera sezione, e che è possibile però in una seconda fase utilizzare una modellazione tridimensionale per rielaborare tali informazioni e ricavare, ad esempio, lo stato di deformazione e tensione in ogni punto di ogni sezione.

Per quanto lo studio delle travi curve sia di grande interesse nelle applicazioni, si pensi ad esempio agli archi, si limiterà qui l’attenzione al caso delle travi il cui asse è rettilineo nella configurazione indeformata (figura 1.1.b), assumendo come tale la configurazione assunta dalla trave in assenza di azioni esterne applicate.

Si farà inoltre quasi sempre la cosiddetta ‘ipotesi di piccoli spostamenti’, per la quale gli spostamenti dell’asse della trave si assumono sufficientemente piccoli da poter studiare il problema dell’equilibrio con riferimento sempre alla sua configurazione indeformata rettilinea. In altre parole e salvo avviso contrario si confonderà la configurazione

Sezione retta

Figure 1.1.a: Trave ad asse curvo.

Sezione retta

Figure 1.1.b: Trave ad asse rettilineo.

deformata con quella indeformata nella scrittura delle equazioni di equilibrio. L'ipotesi di piccoli spostamenti si traduce in un modello matematico estremamente semplificato che fornisce un'efficace schematizzazione della realtà quando le strutture in esame sono dotate di sufficiente rigidezza rispetto alle azioni esterne applicate e quando le azioni stesse non conducono a fenomeni di instabilità.

1.1.1 Piani di simmetria

Nella modellazione tridimensionale di molte travature esiste un piano di simmetria sia geometrica che meccanica. La simmetria meccanica consiste nella presenza di proprietà del materiale e di condizioni di carico e di vincolo speculari rispetto a ed è un concetto che viene presentato in questa fase della trattazione solo dal punto di vista intuitivo mediante lo schema di figura 1.2 rimandando, per una più chiara comprensione, alle definizioni di carichi, vincoli e proprietà del materiale che verranno date in seguito.

π

π

Figura 1.2: Piano di simmetria

Se esiste tale piano l'asse della trave, luogo dei baricentri delle sezioni rette, è sicuramente contenuto in esso. Sebbene non si sia ancora parlato di spostamenti, che riguardano l'aspetto cinematico del problema, né tantomeno si hanno elementi per analizzare relazioni di causa-effetto fra carichi, vincoli e spostamenti, si intuisce che in presenza di un piano di simmetria gli spostamenti dell'asse della trave siano contenuti in . In tal caso la modellazione monodimensionale di una travatura può semplificarsi adottando un modello piano e si parlerà di 'travature piane'.

Con riferimento ad un singolo elemento di una travatura piana si introduce un sistema di riferimento ortonormale {O, i, j, k}, in cui l'origine O degli assi coincide con

il baricentro di una delle sezioni di estremità, j e k sono i due versori degli assi y e z contenuti in e disegnati in figura figura 1.3, mentre i è ortogonale a e di verso tale che la terna {O, i, j, k} risulti levogira. In particolare, l'asse z si assumerà coincidente con l'asse della trave.

x

y
z
i
j
k
Figura 1.3: Sistema di riferimento
In un problema piano momenti (o coppie) e velocità di rotazione possono essere visti
o come dei vettori ortogonali a o, equivalentemente, attraverso la loro componente
rispetto a x, ovvero la loro unica componente non nulla. Pertanto le componenti scalari
M e ˙ rispettivamente di un vettore coppia m e di un vettore velocità di rotazione ˙ si
ottengono mediante i seguenti prodotti scalari[1]:
m· i =26664
M
0
0
37775
·
26664
1
0
0
37775
= M ˙ · i =26664 ˙
0
0
37775
·
26664
1
0
0
37775=
˙
(1.1)
Ragionando direttamente nel piano si immagina di osservare quest'ultimo dalla
parte positiva dell'asse x. Pertanto coppie (o momenti) e velocità di rotazione si assumono positive se antiorarie.

1.1.2 Equilibrio di una trave

Si consideri la trave soggetta ad un sistema di forze F costituito per semplicità solamente
da forze concentrate F_i e da coppie M_j , con i = 1, . . . ,N_f e j = 1, . . . ,N_m,
come mostrato in figura (figura 1.4).
La definizione di equilibrio viene data attraverso la scrittura delle 'equazioni cardinali
della statica':
Definizione 1 Una trave soggetta ad un sistema di forze F si dice in equilibrio se la

risultante di F ed il momento risultante di F rispetto ad un polo arbitrario sono nulli.

[1]Si ricorda che il prodotto scalare fra due vettori u e v, le cui rappresentazioni numeriche rispetto agli assi scelti sono $u = [u_x, u_y, u_z]^t$ e $v = [v_x, v_y, v_z]^t$, si ottiene come somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Figura 1.4: Equilibrio di una singola trave

Indicando dunque con F la risultante di F e con M_O il momento risultante rispetto all'origine O del riferimento, ricordando dalla Meccanica Razionale la loro definizione si ottiene la scrittura esplicita delle equazioni cardinali della statica:

$$F = \sum_{i=1}^{N_f} F_i = 0 \qquad M_O = \sum_{i=1}^{N_f} (r_i \times F_i) \cdot i + \sum_{j=1}^{N_m} M_j = 0 \tag{1.2}$$

dove con r_i si è indicato il vettore posizione del punto di applicazione della forza iesima.

La prima delle (1.2) è un'equazione di tipo vettoriale e rappresenta la condizione di equilibrio alla traslazione. Proiettata sugli assi fornisce le due equazioni di equilibrio alla traslazione secondo le due direzioni y e z:

$$\sum_{i=1}^{N_f} F_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N_f} F_{iz} = 0 \tag{1.3}$$

La seconda delle (1.2) rappresenta invece l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad O ed in componenti si scrive:

$$M_O = \sum_{i=1}^{N_f} (y F_{iz} - z F_{iy}) + \sum_{j=1}^{N_m} M_j = 0 \tag{1.4}$$

Si ricorda peraltro che se è soddisfatto l'equilibrio alla traslazione, ovvero se è nulla la risultante F, allora il momento risultante di F è indipendente dal polo rispetto a cui è calcolato. In tal caso, quindi, se l'equilibrio alla rotazione è soddisfatto intorno

ad O
allora lo è anche intorno a qualsiasi altro punto del piano.

1.1.3 Vincoli esterni

Si consideri una travatura piana costituita da una o più travi schematizzate mediante la
modellazione monodimensionale. Un punto di una trave rappresenta il baricentro di una

sezione retta ed è caratterizzato nel moto assoluto nel piano da tre parametri cinematici
scalari, ovvero da una traslazione nel piano e da una rotazione. Se il valore di uno o più
parametri è imposto a priori il punto si dice vincolato e si dice che in quel punto è stato
imposto un 'vincolo esterno'. Si considerano qui vincoli che non variano nel tempo per
cui l'imposizione a priori del valore di un parametro cinematico equivale ad imporre
nulla la sua variazione nel tempo, o velocità.
Alla caratterizzazione cinematica di un vincolo appena data ne corrisponde una di
tipo statico nello spirito della dualità statico-cinematica. Infatti, se la variazione di un
parametro è impedita ciò significa che esiste un ente statico che si oppone a tale possibile
variazione con una reazione che è detta, appunto, reazione vincolare.
Si sottolinea che un vincolo può imporre un valore nullo o non nullo di un parametro
di spostamento e, nel secondo caso, il valore imposto rappresenta un 'cedimento'
del vincolo. Se il cedimento è indipendente dalla reazione vincolare il vincolo si dice
infinitamente rigido ed il cedimento si dice di tipo 'anelastico'. Il cedimento si dice invece
'elastico' quando esso è proporzionale e discorde al valore assunto della reazione.
Il rapporto fra i moduli della reazione vincolare e del cedimento relativi ad una certo
parametro cinematico fornisce la 'rigidezza' del vincolo.
Avendo fatto l'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli si assume anche che eventuali
cedimenti dei vincoli alterino la configurazione della travatura in modo trascurabile
e che quindi, anche in presenza di cedimenti, si possa studiare l'equilibrio della
struttura nella sua configurazione indeformata piuttosto che, come si dovrebbe a rigore
fare, nella sua configurazione deformata. Con tale ipotesi, dunque, la presenza di cedimenti
non gioca alcun ruolo in questa fase in cui si studia esclusivamente il problema dell'equilibrio.
Altre tre ipotesi che si faranno sono quelle di vincoli lisci, bilaterali ed

infinitamente resistenti. In virtù della prima di queste ogni reazione vincolare compie potenza virtuale nulla per gli atti di moto consentiti dal vincolo escludendo, pertanto, fenomeni di attrito; quella di vincoli bilaterali implica che la variazione di un parametro cinematico vincolato è impedita in entrambi i versi; quella di vincoli infinitamente resistenti comporta che ogni vincolo è capace di esplicare la sua azione qualsiasi sia il valore della reazione vincolare stessa[2].

Un vincolo si dice ‘semplice’ quando impedisce la variazione di un solo parametro cinematico scalare, ‘doppio’ quando ne impedisce due, ‘triplo’ quando blocca tutti e tre i parametri. La simbologia adottata per i vincoli è descritta nelle figure 1.5-1.7.

Un ‘carrello’, detto anche ‘appoggio scorrevole’ (o equivalentemente[3] un ‘pendolino’ infinitamente rigido), blocca il valore della sola componente della velocità di traslazione del punto in direzione ortogonale al piano di scorrimento del carrello (parallela a quella del pendolino). Esso è dunque un ‘vincolo semplice’. Un ‘doppio doppio pendolo’ impedisce la sola velocità di rotazione e dunque è anch’esso un vincolo semplice.

[2]Si noti che le ipotesi di vincoli di vincoli lisci, bilaterali ed infinitamente resistenti sono estrememamante utili per semplificare il modello matematico ma la loro aderenza al problema fisico va attentamente verificata caso per caso

[3]Non c’è alcuna ragione concettuale per la quale si usano a volte simbologie e nomi diversi per indicare lo stesso tipo di vincolo. Si preferisce qui indicare più notazioni per consentire una più facile consultazione di altri testi.

(a) (b)
y
z
(c)
y
z
y
z

Figura 1.5: Vincoli esterni semplici. (a) ‘carrello’ (o ‘appoggio scorrevole’) o pendolino in direzione y: $\dot{v}_y = 0$; (b) ‘carrello’ (o ‘appoggio scorrevole’) o pendolino in direzione z: $\dot{v}_z = 0$; (c) ‘doppio doppio pendolo’: ˙ = 0.

(a) (b)
y
z
y (c)
z
y

z
Figura 1.6: Vincoli esterni doppi. (a) 'appoggio' o 'cerniera esterna': v˙ = 0; (b) 'doppio pendolo' in direzione z: ˙ v_z = 0 e ˙ = 0; (c) 'doppio pendolo' in direzione y:
˙ v_y = 0 e ˙ = 0.
Figura 1.7: Vincolo esterno triplo (incastro): ˙ v = 0 e ˙ = 0.
Un 'appoggio fisso' (o equivalentemente una 'cerniera esterna') è un vincolo 'doppio'
che impedisce entrambe le componenti di velocità di traslazione. Analogamente
un 'doppio pendolo' (o equivalentemente un 'pattino') impedisce sia la velocità di roG.

tazione che quella di traslazione nella direzione dei pendoli (ortogonale ai piatti del
pattino).
L''incastro' rappresenta invece un vincolo triplo e blocca sia la velocità di rotazione
che entrambe le componenti della velocità di traslazione.
E' ovvio che un vincolo doppio può sempre ottenersi mediante la composizione di
due vincoli semplici, e che l'incastro può ottenersi mediante la composizione di tre
vincoli semplici (ad esempio due carrelli ed un doppio doppio pendolo).
Da un punto di vista statico la retta d'azione della reazione di un carrello passa per
il punto di appoggio ed è ortogonale al piano di scorrimento del carrello. Equivalentemente
la retta d'azione della reazione di un pendolino concide con l'asse del pendolino
stesso. Un doppio doppio pendolo reagisce invece solo con una coppia, ed includendo
nell'insieme dei punti del piano anche i punti impropri la sua retta d'azione concide con
la retta impropria, luogo dei punti impropri. Si deduce da quanto detto che la retta d'azione
della reazione di un vincolo semplice è sempre univocamente determinata (figura
1.8).
La retta d'azione della reazione di una cerniera esterna (di un appoggio fisso) è invece
una delle infinite rette della stella di rette passanti per il baricentro della cerniera (per il
punto di appoggio). Pertanto la reazione può sempre decomporsi nella somma di due
componenti secondo due direzioni non parallele. La retta d'azione di un doppio pendolo
(di un pattino) è una delle infinite rette parallele alla direzione dei pendoli (ortogonale ai
piatti del pattino). La reazione può allora decomporsi nella somma di una forza avente
la direzione dei pendoli e di una coppia. Quindi un vincolo esterno doppio non definisce

univocamente la retta d'azione della reazione ma impone ad essa di passare per un punto
del piano. Tale punto è proprio nel caso della cerniera esterna (di un appoggio fisso), ed
improprio nel caso del doppio pendolo (del pattino) (figura 1.9).
La reazione di un incastro (vincolo triplo) può invece avere come retta d'azione una
qualsiasi retta del piano. La reazione può allora decomporsi nella somma di due forze
in direzioni non parallele tra loro e di una coppia (figura 1.10).
R R M
Figura 1.8: Reazioni esplicate dai vincoli semplici.

1.1.4 Vincoli interni

Un vincolo interno tra due punti A e B della travatura definisce a priori il valore della
differenza tra i valori assunti in A e in B da uno o più parametri cinematici. Tutto quanto
detto per i vincoli esterni vale anche per quelli interni se si sostituisce, dal punto di vista
cinematico, al concetto di moto assoluto quello di moto relativo tra i punti A e B e, dal
punto di vista statico, al concetto di reazione vincolare quello di interazione tra i punti

"!##$% &
& ' (
)
Figura 1.9: Reazioni esplicate dai vincoli doppi.

Figura 1.10: Reazioni esplicate dall'incastro.

A e B. Tale interazione rispetta il principio di azione e reazione per cui essa è costituita
da una reazione di A su B e di una uguale in modulo e contraria in verso di B su A.
Vincoli interni semplici tra due punti A e B sono il 'pendolino interno', che impedisce
la velocità relativa tra A e B, $\dot{v}_p$ in direzione parallela a quella del suo asse p, ed il
'doppio doppio pendolo interno', che impedisce la velocità di rotazione relativa $\dot{}_{AB}$.
Vincoli interni doppi sono invece la 'cerniera', che impedisce la velocità relativa
$\dot{v}_{AB}$, ovvero entrambe le sue due componenti secondo due qualsiasi direzioni non

parallele, ed il ‘doppio pendolo interno’ (o equivalentemente ‘pattino interno’), che impedisce sia la velocità relativa in direzione parallela agli assi del doppio pendolo (ortogonale ai piatti del pattino) che la velocità di rotazione relativa ˙$_{AB}$.
Il vincolo triplo interno è il vincolo di continuità cinematica. Esso impedisce sia le due componenti della velocità relativa, ovvero il vettore $\dot{v}_{AB}$, sia la velocità di rotazione relativa ˙$_{AB}$.
Come per i vincoli esterni è ovvio che un vincolo interno doppio può sempre ottenersi mediante la composizione di due vincoli interni semplici, e che il vincolo di continuità può ottenersi mediante la composizione di tre vincoli interni semplici.
Da un punto di vista statico l’interazione trasmessa da un pendolino è costituita da due reazioni uguali e contrarie, R_{AB} di A su B e R_{BA} di B su A, aventi come retta d’azione l’asse p del pendolino, mentre quella trasmessa dal doppio doppio pendolo interno è data da due coppie reattive uguali e contrarie M_{AB} di A su B e M_{BA} di B su A. Se si includono i punti impropri nel piano la retta d’azione di una coppia è la retta impropria, ovvero luogo di tutti i punti impropri del piano. Pertanto, analogamente a quanto accade per i vincoli esterni semplici, i vincoli interni semplici definiscono univocamente la retta d’azione delle due reazioni mutue trasmesse dal vincolo (figura 1.11).

Figura 1.11: Vincoli interni semplici.

-$&%')(*/.*(* 0-"1!2$#$&%')(*"!+,$

3

Figura 1.12: Vincoli interni doppi.

Figura 1.13: Vincolo interno interno triplo.

L’interazione trasmessa dalla cerniera è costituita da due reazioni uguali e contrarie aventi come retta d’azione una qualsiasi della stella di rette passanti per il centro della cerniera. Ognuna di tali reazioni può dunque decomporsi in due componenti secondo, ad esempio, le direzioni y e z degli assi in figura. L’interazione trasmessa dal doppio pendolo interno è costituita da due reazioni uguali e contrarie nella direzione degli assi del doppio pendolo e da due coppie uguali e contrarie. Componendo insieme tali reazioni, ognuna delle reazioni mutue trasmesse dal vincolo può avere come risultante una qualsiasi forza agente su una qualsiasi retta parallela agli assi del doppio pendolo. In definitiva, un vincolo interno doppio non definisce univocamente la retta d’azione dell’interazione ma impone ad essa di passare per un punto del piano. Tale punto è proprio

nel caso della cerniera, ed improprio nel caso del doppio pendolo (figura 1.12). L’interazione trasmessa dal vincolo interno triplo può avere come retta d’azione una qualsiasi retta d’azione nel piano. Ognuna delle due reazioni, uguali e contrarie fra loro, che costituiscono tale interazione può dunque decomporsi nella somma di due forze non parallele passanti per il punto di continuità e di una coppia (figura 1.13). E’ utile sottolineare che un vincolo interno triplo esiste in ogni punto di continuità della trave e che le

interazioni vengono spesso decomposte nelle due componenti rispettivamente parallela
e ortogonale all'asse ed in una coppia. Tali componenti costituiscono le 'caratteristiche
della sollecitazione interna' e verranno ampiamente studiate nel seguito.

1.2 Strutture labili, iperstatiche e isostatiche

Si consideri una travatura costituita da t tratti continui. Ognuno dei tratti sia costituito
da uno o più elementi trave assemblati insieme e si faccia l'ipotesi che la linea d'asse
di ogni tratto, intesa come l'unione degli assi delle travi che lo costituiscono, sia monoconnessa
(figura 1.14). Si esclude dunque in questa fase il caso di tratti che presentino
maglie chiuse continue, cioè tratti pluriconnessi (figura 1.15).

Figura 1.14: Esempi di tratti monoconnessi.

Figura 1.15: Esempi di tratti pluriconnessi, cioè caratterizzati dalla presenza di maglie
chiuse continue.

In assenza di vincoli esterni ed interni ognuno dei tratti è caratterizzato da 3 possibili
atti di moto rigido indipendenti e si dice dunque che ha 3 gradi di libertà nel piano.
Dunque il numero di gradi di libertà della struttura, ovvero di possibili atti di moto
indipendenti per i quali l'atto di moto di ogni tratto continuo è rigido, è pari a 3t. Tale
numero è anche detto 'grado di labilità' ed indicato con l.
Si immagini ora di aggiungere un numero s di vincoli semplici, che possono essere
in generale interni o esterni. In tale conteggio un vincolo semplice vale 1, uno doppio
vale 2 ed uno triplo vale 3, e questo sia per i vincoli interni che per quelli esterni. Ogni
vincolo semplice, da solo, elimina un grado di libertà della struttura. Se si aggiungono

però i vincoli in sequenza, mentre il primo sicuramente eliminerà un grado di libertà,
a partire dal secondo ognuno di vincoli aggiunti può eliminare o può non eliminare un
ulteriore grado di libertà. Nel primo caso il vincolo si definisce 'efficace' mentre nel
secondo esso è 'inefficace'[4]. Si indichi con s_{ef} il numero dei vincoli efficaci e con s_{in}
quello dei vincoli inefficaci. Si può dimostrare che i due numeri s_{ef} ed s_{in} sono indipendenti
dalla sequenza con cui si inseriscono i vincoli, sebbene la caratterizzazione di
ciascuno di essi come efficace o inefficace dipenda invece da tale sequenza. Il numero di
vincoli inefficaci s_{in} è tipicamente indicato come 'grado di iperstaticità' della struttura

ed indicato con i. Quando $i > 0$ una travatura viene detta 'staticamente indeterminata'
mentre quando $i = 0$ essa è detta 'staticamente determinata'. Il motivo di tale notazione
verrà chiarito dal seguito.
Il grado di labilità della struttura vincolata risulta pari a $l = 3t - s_{ef}$, ed essendo
$s_{ef} + s_{in} = s$, si ottiene: $l = 3t - s + s_{in}$, ovvero:

$$3t - s = l - i \quad (1.5)$$

Tale relazione è di grande importanza per lo studio dell'equilibrio di una travatura ed
in base ad essa le travature sono classificabili nei seguenti quattro gruppi:

- $l > 0$ e $i > 0$: travature labili[5] e staticamente indeterminate[6];
- $l > 0$ e $i = 0$: travature labili e staticamente determinate;
- $l = 0$ e $i > 0$: travature non labili e staticamente indeterminate o più semplicemente travature 'iperstatiche';
- $l = 0$ e $i = 0$: travature non labili e staticamente determinate o più semplicemente travature 'isostatiche'.

C_1
C_{12}
C_2
(a)
I
II
C
(b)
A
B
D

Figura 1.16: Travature labili e staticamente indeterminate ($l = 1$ e $i = 1$).

[4] L'efficacia va intesa in questo contesto solamente quale capacità di eliminare un grado di libertà.
Vincoli che con tale criterio vengono definiti qui inefficaci possono essere di grande importanza per il
comportamento strutturale.

[5] Una struttura labile con grado di labilità pari ad l si dice anche 'l volte labile'.

[6] Una struttura staticamente indeterminata con grado di iperstaticità pari ad i si dice anche 'i volte
iperstatica'.

C_1
C_{12}
C_2
C
I
II
A
B
D
(a)
(b)

Figura 1.17: Travature labili e staticamente determinate ($l = 1$ e $i = 0$).

A D
B

E
I G
II
III
p
V8
(a)
(b)
Figura 1.18: Travature iperstatiche (l = 0 e i = 1).
A D
B
E
I G
II
III
p
p′
(a)
(b)
Figura 1.19: Travature isostatiche (l = 0 e i = 0).

Per identificare una travatura bisogna contare il numero dei tratti t ed il numero dei
vincoli semplici s. Conviene quindi determinare il grado di labilità l mediante la determinazione
dei possibili centri di rotazione con i metodi noti dalla Meccanica Razionale,
e ricavare quindi i dalla relazione (1.5).

Da un punto di vista statico, il numero di reazioni vincolari incognite è pari ad s,
mentre il numero di equazioni di equilibrio linearmente indipendenti che possono scriversi
è pari a 3 t. Infatti, come si vedrà meglio in seguito, per ognuno dei tratti possono

scriversi le equazioni cardinali della statica, per un totale di 3 t equazioni. Ogni altra
equazione di equilibrio che si scrivesse, considerando ad esempio l'equilibrio di più
tratti insieme, risulterebbe dipendente dalle prime 3 t equazioni.

Si consideri ad esempio le travature delle figure 1.16-1.19. Per la trave di figura
1.16.a si ha 3 t−s = 0. Ai fini della valutazione di l si osserva che ognuno dei tre carrelli
impone, da solo, che l'eventuale[7] centro di rotazione sia sulla retta verticale passante
per il carrello stesso. Tali tre condizioni sono tra loro compatibili con la posizione
del centro nel punto improprio verticale, corrispondente ad una traslazione orizzontale.

Quindi esistono atti di moto rigido consentiti dai vincoli ed il loro centro di rotazione è
univocamente definito. Pertanto tali atti di moto sono univocamente definiti da un solo
parametro scalare (appunto la velocità di traslazione) e dunque l = 1.

Per la struttura di figura 1.16.b si ha ancora che 3 t − s = 0. Inoltre la cerniera in A
impone che l'eventuale centro C_1 del tratto I sia A. La cerniera in B impone che

l'eventuale centro relativo C_{12} tra i due tratti I e II sia B. Il doppio pendolo in D impone all'eventuale centro di rotazione C_2 di coincidere con il punto improprio verticale. Le tre condizioni sono tra loro compatibili e, anche in questo caso, determinano univocamente le posizioni di tutti i centri assoluti e relativi. Pertanto anche in questo caso l'atto di moto è definito da un solo parametro, ad esempio dalla velocità di rotazione del tratto I intorno ad A.

Ragionando come si è fatto per la trave di figura 1.16.a si riconosce immediatamente che la trave di figura 1.17.a è una volta labile. Essendo $3t - s = 1$, risulterà $i = 0$ per cui essa è staticamente determinata.

Per la travatura di figura 1.17.b i vincoli in A e B impongono ai centri C_1 e C_{12} di trovarsi rispettivamente in A ed in B. Il vincolo in D impone invece al centro C_2 di trovarsi sulla retta verticale per D. Le condizioni sono tra loro compatibili con una ed una sola disposizione dei tre centri di rotazione, ovvero quella riportata in figura, per cui $l = 1$. Essendo $3t - s = 1$ anche in questo caso risulterà $i = 0$ e la struttura è staticamente determinata.

Quanto alle strutture riportate nelle figure 1.18 e 1.19, mentre si riconosce facilmente che $l = 0$ per quelle nelle figure 1.18.a e 1.19.a, per le altre due travature si procede come segue. Per la travatura di figura 1.18.b si può operare sia considerando la struttura come costituita da 3 tratti, sia vedendola formata dai due tratti I e II e considerando quindi il tratto III come un pendolo che costituisce un ulteriore vincolo semplice tra i tratti I e II. Utilizzando il primo approccio i vincoli impongono ai centri di rotazione le condizioni riportate nella tabella 1.1.

Posizione vincolo	A	B	D	E	G
Condizione	$C_1 = A$	$C_{12} = B$	$C_2 = V1$	$C_{13} = E$	$C_{23} = G$

Tabella 1.1: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.18.b.

Le condizioni sui centri relativi non sono compatibili fra loro perché per avere un

7Si usa il termine 'eventuale' perché il fatto che il centro di rotazione esista o meno va determinato valutando se le condizioni imposte dai vincoli siano compatibili tra loro, come si vedrà dagli esempi seguenti.

cinematismo C_{12}, C_{23} e C_{13} dovrebbero essere allineati. Pertanto si può dire che non può esistere un moto relativo tra I e II e dunque in tal caso un atto di moto sarebbe possibile solamente avendo C_1 coincidente con C_2, cosa evidentemente non compatibile con le altre due condizioni della tabella 1.1. Pertanto la struttura risulta non labile. Essendo poi 3 t − s = −1 essa risulta una volta iperstatica.

Ragionando con il secondo approccio, che peraltro è consigliabile, il pendolo EG viene considerato quale un ulteriore vincolo tra i tratti I e II, che impone ai due punti E di I e G di II di avere, in un moto rigido, la stessa componente di velocità di traslazione nella direzione dell'asse p del pendolo. Con questo approccio i vincoli impongono ai centri di rotazione le condizioni riportate nella tabella 1.2. Si riconosce dalla tabella

Posizione vincolo A B D tratto III

Condizione C_1 = A C_{12} = B C_2 = V1 C_{12} 2 p

Tabella 1.2: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.18.b considerando il tratto III come un vincolo tra I e II.

che la condizione che il centro C_{12} sia allineato con E e G, ricavata in precedenza come condizione di allineamento dei centri relativi, viene qui ottenuta direttamente come condizione imposta dal tratto III visto come pendolo. Pertanto le due condizioni imposte dai vincoli sul centro C_{12} sono fra loro incompatibili e, continuando il ragionamento come si è fatto in precedenza, si arriva allo stesso risultato.

I vincoli della sttuttura in figura 1.19.b impongono ai centri le condizioni riportate nella tabella 1.3. Anche in questo caso le condizioni imposte sul centro relativo C_{12} dal

Posizione vincolo A B D tratto III

Condizione C_1 = A C_{12} = B C_2 2 p_0 C_{12} 2 p

Tabella 1.3: Condizioni sui centri imposte dai vincoli nella struttura di figura 1.19.b considerando il tratto III come un vincolo tra I e II.

vincolo in B e dal tratto III sono incompatibili fra loro. Quindi non può esserci un moto relativo tra I e II, per cui in un eventuale moto rigido i tratti I e II dovrebbero muoversi come un unico tratto rigido, e quindi dovrebbe aversi $C_1 = C_2$. Ciò però è incompatibile con le condizioni imposte dai vincoli in A ed in D, come si vede dalla tabella, in quanto il centro $C_1 = C_2$ non può contemporaneamente trovarsi in A e sulla retta p_0.

1.2.1 Il problema dell'equilibrio

La determinazione delle reazioni vincolari esterne ed interne costituisce il ‘problema dell’equilibrio’. Il teorema di Lagrange, noto dalla Meccanica Razionale, afferma che una struttura soggetta ad un sistema di forze attive è in equilibrio se e solo se esso compie potenza virtuale nulla per ogni atto di moto rigido consentito dai vincoli.

Se l = 0 evidentemente non esistono possibili moti rigidi della travatura consentiti dai vincoli, e dunque l’equilibrio della travatura è sicuramente assicurato. Pertanto, qualsiasi sia il sistema di forze esterne agente sulla travatura il sistema di 3t equazioni ammette sicuramente soluzione. Si possono distinguere dunque i due casi in cui i = 0 e i > 0.

Nel primo caso (i = 0) la travatura è isostatica. Essendo 3t − s = 0 il numero di equazioni è pari a quello delle incognite. Pertanto il fatto che il problema ammette sempre soluzione qualsiasi sia il sistema delle forze esterne agente equivale a dire che il sistema di equazioni di equilibrio ammette soluzione qualsiasi sia il vettore dei termini noti. Ciò avviene se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è non nullo e questo, a sua volta, assicura anche l’unicità della soluzione.

Pertanto si ricava il seguente risultato fondamentale:

Teorema 1 Il problema dell’equilibrio per una travatura isostatica ammette sempre una ed una sola soluzione.

Nel caso in cui i > 0 la travatura è iperstatica. Essendo s − 3 t = i > 0 il numero delle incognite è maggiore del numero di equazioni. Poiché si è visto che il problema ammette sempre soluzione, ciò significa che la matrice dei coefficienti del sistema è di rango massimo, pari a 3 t, e dunque esistono1_i soluzioni. Pertanto si ricava il seguente altro risultato fondamentale:

Teorema 2 Il problema dell’equilibrio per una travatura iperstatica ammette sempre 1_i soluzioni, avendo indicato con i il grado di iperstaticità.

Si deduce che per ricavare il valore delle reazioni vincolari per una travatura iperstatica non basta risolvere il problema dell’equilibrio. Si vedrà in seguito che in tal caso, di estremo interesse per le applicazioni in quanto la maggior parte delle travature sono iperstatiche, per ricavare le reazioni vincolari sarà necessario tenere conto delle caratteristiche di deformabilità del materiale e quindi degli aspetti cinematici.

Nel caso di travature labili il problema dell’equilibrio può ammettere o non ammettere soluzione a seconda del sistema di forze attive agente. Infatti, se il sistema di forze attive compie potenza virtuale non nulla per uno dei possibili atti di moto rigido è noto dal teorema di Lagrange che l'equilibrio non può sussistere. Se invece il sistema di forze attive compie potenza virtuale nulla per qualsiasi atto di moto rigido consentito dai vincoli allora, sempre dal teorema di Lagrange, sappiamo che l'equilibrio sussiste. In tal caso la soluzione è unica se $i = 0$ mentre ci saranno 1_i soluzioni se $i > 0$. Sussistono dunque i seguenti due risultati.

Teorema 3 Se per una travatura labile ($l > 0$) e staticamente determinata ($i = 0$) il problema dell'equilibrio ammette soluzione allora tale soluzione è anche unica.

Teorema 4 Se per una travatura labile ($l > 0$) e staticamente indeterminata ($i > 0$) il problema dell'equilibrio ammette soluzione allora esistono 1_i soluzioni.

Di tali risultati non si fornisce una dimostrazione ma si analizzeranno alcuni esempi nella prossima sezione.

1.3 Calcolo delle reazioni vincolari

1.3.1 Travi ad un solo tratto

Si consideri la trave di figura 1.20. Essendo essa isostatica siamo sicuri che la soluzione del problema dell'equilibrio esiste ed è unica. Per quanto il problema in esame sia di semplicissima soluzione si vuole comunque fin da ora sottolineare la sequenza di operazioni da compiere per la soluzione di qualsiasi problema di statica:

- Determinare il corpo C per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
- Determinare il sistema di forze F agente su tale corpo. Esso sarà costituito dalla somma del sistema di tutte le forze e coppie esterne (note) direttamente agenti su C, detto sistema di forze attive F_a, e del sistema di tutte le reazioni (incognite) che il mondo esterno a C esplica su C, detto sistema delle forze reattive F_r.
- Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $F = F_a + F_r$.

F

α

z

y

R_{yA}

R_{zA}

RB
L/2 L/2
A B
Figura 1.20: Trave appoggiata con una forza in mezzeria.
Nel caso in esame il corpo per il quale s'impone l'equilibrio è tutta la trave AB. Su
di essa agiscono la forza F in mezzeria e le reazioni incognite in A e B. Le equazioni
cardinali della statica si scrivono imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione y
e z e quello alla rotazione intorno ad A:
8>
>><>>>:
$R_{yA} + R_B + F \cos = 0$
$R_{zA} + F \text{ sen } = 0$
$-R_B L - F \cos$
L
2
= 0
(1.6)

Esse forniscono la soluzione:
$R_{zA} = -F \text{ sen }$ $R_{yA} = -$
F cos
2
$R_B = -$
F cos
2
Il segno negativo di tutti i termini vuol dire che i versi ipotizzati inizialmente in figura
1.20 non sono quelli giusti. In figura 1.21 si sono riportate le reazioni con il loro verso
ed il loro modulo.
Si noti che ognuna delle due reazioni verticali in A ed in B può essere direttamente
determinata con una sola equazione imponendo, rispettivamente, l'equilibrio alla
rotazione intorno a B e ad A.
F
α
z
y
L/2 L/2
A B
F sen α
F cos
2
α F cos

2

α

Figura 1.21: Trave appoggiata con una forza in mezzeria.

Si consideri ora la trave di figura 1.22. Si ricava immediatamente, imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale, che la reazione orizzontale in A è nulla. Assumendo positive le reazioni verticali in A e B se dirette verso l'alto, ed eliminando per semplicità di notazione il pedice y, le due equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ad A ed a B si scrivono come segue:

$R_B\,(a + b) - F\,a = 0 \quad - R_A\,(a + b) + F\,b = 0$

e forniscono i valori:

$R_A =$
$\frac{b}{a + b}$
$F \quad R_B =$
$\frac{a}{a + b}$
F

Si riconosce dunque che il rapporto tra i moduli delle due reazioni è inversamente proporzionale a quello tra le relative distanze dalla forza verticale in mezzeria.

Si consideri ora la trave 1 volta iperstatica di figura 1.23 e si ponga pari ad X il valore della reazione verticale in B, assunto positivo se la reazione è verso il basso. Imponendo l'equilibrio di tutta la trave AC soggetta alla forza F ed alle reazioni vincolari assunte positive se dirette come in figura si ricava il valore di queste ultime (i calcoli si lasciano come esercizio):

$R_{zA} = F$ sen $\quad R_{yA} =$
F cos
4
+
X
2
$R_B = X \quad R_C =$
3 F cos
4
+
X
2
(1.7)

F
z
y
$R_A \; R_B$

a b
A B
L = a+b
Figura 1.22: Trave appoggiata con una forza verticale.
F
α
z
y
R_{yA}
R_{zA}
R_C
L L/2
A C
L/2
$R_B = X$
B
Figura 1.23: Trave iperstatica.
Dunque, qualsiasi sia il valore di X le (1.7) sono soluzione del problema dell'equilibrio,
che dunque ammette1_1 soluzioni coerentemente con il fatto che la struttura è una
volta iperstatica.
La trave di figura 1.24 è invece labile e staticamente determinata. Dunque il problema
dell'equilibrio non ammette sempre soluzione e ciò si evince immediatamente in
questo semplice esempio perché chiaramente non può sussistere l'equilibrio per valori
di sen 6= 0, ovvero quando la forza F non è verticale e quindi ha una componento
orizzontale non nulla. Per = 0 la soluzione del problema dell'equilibrio esiste ed è
unica, coerentemente con il fatto che i = l + s − 3t = 0 e con il teorema 3, e fornisce
le reazioni:
$R_A =$
F
2
$R_B =$
F
2
ovvero le reazioni di una trave appoggiata con una forza verticale in mezzeria.
La trave di figura 1.25 è invece labile e staticamente indeterminata in quanto
3t − s = 0 e l = 1 essendo possibile un atto di moto di traslazione orizzontale. Anche
in questo caso dunque l'equilibrio non è sempre possibile, ed infatti la soluzione esiste
solamente per sen = 0, ovvero quando la forza è verticale. In tal caso, inoltre, essendo

F
α
z
y
L/2 L/2
A B
RA
RB

Figura 1.24: Trave labile e staticamente determinata.

$i = l+s-3t = 1$, la soluzione non è unica e fornisce i seguenti1[1] valori delle reazioni vincolari:

$$R_A = \frac{F}{4} + \frac{X}{2} \qquad R_B = X \qquad R_C = \frac{3}{4}F + \frac{X}{2} \tag{1.8}$$

F
α
z
y
RA RC
L L/2
A C
L/2
R B = X
B

Figura 1.25: Trave labile e staticamente indeterminata.

Si è dunque verificato che la soluzione del problema dell'equilibrio quando esiste (sempre se $l = 0$, solo per alcuni sistemi di forze esterne quando $l > 0$), non è unica se $i > 0$. Questo vuol dire che per determinare le reazioni vincolari non basta solamente considerare il problema dell'equilibrio, ma bisognerà anche esaminare altri aspetti quali la deformabilità della struttura. In altre parole, per la determinazione delle reazioni vincolari, e anche delle caratteristiche della sollecitazione interna come si

vedrà in seguito,
bisognerà fare delle ipotesi sul comportamento del materiale e sulla geometria delle sezioni della trave.
Viceversa, per strutture staticamente determinate la soluzione quando esiste è unica.
Dunque le reazioni vincolari (così come le caratteristiche della sollecitazione interna)
non dipendono dal materiale e dalla geometria delle sezioni della travatura. In realtà

quest'ultima affermazione è vera entro i limiti in cui è accettabile l'ipotesi di piccoli
spostamenti, cioè che gli spostamenti siano sufficientemente piccoli da poter confondere
la configurazione deformata con quella indeformata, in modo da scrivere le equazioni
di equilibrio con riferimento a quest'ultima piuttosto che alla condifurazione deformata,
come sarebbe invece a rigore richiesto.

1.3.2 Travi soggette ad un carico trasversale distribuito

Le forze concentrate rappresentano una schematizzazione matematica che risulta efficace
quando un carico esterno agisce su una porzione relativamente limitata della trave.
In molti casi il carico esterno agisce su una porzione estesa e va dunque schematizzato
come un carico distribuito.
Facendo riferimento alla trave di figura 1.26, un carico distribuito in direzione y può
essere definito con una funzione scalare q definita nell'intervallo [0, L]. Sull'intorno
elementare di ampiezza d z dell'ascissa z agisce dunque una risultante verticale per z di
modulo d F = q(z) d z, positiva se diretta verso il basso.

z
y
R_{yA}
R_{zA}
R_B
L
A B
dF = q(z) dz
z

Figura 1.26: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito.

Si consideri ora l'equilibrio di tutta la trave, che è soggetta al carico q ed alle reazioni
vincolari, e si scrivano le equazioni cardinali della statica:
8>
>>>>><>>>>>>:
$R_{zA} = 0$

$$
\begin{cases}
R_{yA} + R_B + \int_0^L q(z)\, d z = 0 \\
-R_B L - \int_0^L q(z)\, z\, d z = 0
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

Per scrivere le (1.9) si è considerato che la sommatoria di tutti i contributi elementari $d F = q(z)\, d z$ fornisce l'integrale del carico tra 0 ed L. Inoltre, nello scrivere l'equilibrio alla traslazione intorno ad A, ovvero la terza delle (1.9), si è tenuto conto che il momento risultante di ciascuna delle forze elementari $d F$ all'ascissa z è pari a $-d F\, z = -q(z)\, z\, d z$.

Si indichi con Q la risultante del carico q in $[0, L]$:

$$
Q = \int_0^L q(z)\, d z \tag{1.10}
$$

Facendo l'ipotesi che $Q \neq 0$ e ponendo:

$$
\bar{z} = \frac{\int_0^L q(z)\, z\, d z}{\int_0^L q(z)\, d z} = \frac{1}{Q} \int_0^L q(z)\, z\, d z \tag{1.11}
$$

le (1.9) si scrivono come segue:

$$
\begin{cases}
R_{zA} = 0 \\
R_{yA} + R_B + Q = 0 \\
-R_B L - Q\bar{z} = 0
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

Le (1.12) sono le equazioni che si scriverebbero se al posto del carico distribuito q si sostituisse la sua risultante Q all'ascissa $\bar{z}$. Tale ascissa rappresenta l'intersezione dell'asse z con l'asse centrale del carico q.

Pertanto, ai fini della determinazione delle reazioni vincolari si può sostituire al carico q la sua risultante Q disposta sull'ascissa $\bar{z}$. Infatti essa costituisce un sistema (costituito da un'unica forza) staticamente equivalente al carico distribuito in quanto ha la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi. Per chiarire meglio quest'ultima cosa basta riscrivere la $(1.10)_2$ come segue:

$$
Q\bar{z} = \int_0^L
$$

q(z) z d z (1.13)
in cui il primo membro rappresenta il momento risultante rispetto ad A della risultante
Q disposta in z, mentre il secondo membro è il momento risultante rispetto ad A di tutto
il carico, avendo in entrambi i casi assunto positivi i momenti orari per semplicità. Per la
definizione di z dunque tali due momenti sono uguali. Si sottolinea ancora che, essendo
Q per definizione uguale alla risultante del carico, allora se i due momenti risultanti
rispetto ad A a primo e a secondo membro della (1.13) sono uguali allora lo sono anche
i momenti risultanti rispetto a qualsiasi altro polo.
Tale circostanza è in realtà un caso particolare del seguente risultato di carattere
generale.

Teorema 5 La soluzione delle equazioni cardinali della statica per un corpo soggetto
ad un sistema di forze attive F_a e ad un sistema di forze reattive F_r non cambia se si
sostituisce F_a con un sistema $\tilde{F}_a$ ad esso staticamente equivalente, ovvero caratterizzato
dalla stessa risultante e dallo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi.
Si consideri ad esempio la trave di figura 1.27 soggetta ad un carico uniformemente
distribuito.

z
y
R_{yA}
R_{zA}
R_B
L
A B
$q(z) = q$

Figura 1.27: Trave appoggiata soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

Dalle relazioni (1.10) si ottiene:

Q = Z_0
L
q d z = q Z_0
L
d z = q L z =
1
Q Z_0
L
q z d z =
1
q L
q Z_0
L

z d z =
L
2
(1.14)
e dunque il calcolo delle reazioni può effettuarsi con riferimento allo schema di figura
1.28, in cui al carico distribuito (lasciato in grigio) si è sostituita la risultante di modulo
q L disposta in mezzeria. Si ottiene dunque:
$R_{zA} = 0$ $R_{yA} =$
q L
2
$R_B =$
q L
2
Analogamente si ricavano le soluzioni dei casi delle figure 1.29 e 1.30, la cui determinazione
si lascia come esercizio.
Nel caso in cui la risultante del carico Q è nulla il carico è staticamente equivalente
ad una coppia il cui valore può ricavarsi, tra gli altri modi, considerando separatamente
le risultanti delle parti positive e negative del carico e componendole poi insieme, come
si è fatto nell'esempio di figura 1.31.

1.3.3 Travature a più tratti

Si consideri la trave isostatica di figura 1.32. Per il calcolo delle reazioni vincolari si
possono scrivere le equazioni cardinali della statica per ognuno dei due tratti continui,

z
y
L/2
A B
q(z) = q
L/2
Q = q L
q L
2
q L
2

Figura 1.28: Reazioni per la trave appoggiata soggetta ad un carico uniformemente
distribuito.

z
y
L
A B
q(z) = q* z
L q*

z
y
L
3
A B
Q = q* L
2
2
3
L
q* L
3
q* L
6

Figura 1.29: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito ‘triangolare’ crescente.

z
y
L
A B
q(z) = q* 1- z
L
q*
z
y
L
3
A B
Q = q* L
2
2
3
L
q* L
3
q* L
6

Figura 1.30: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito ‘triangolare’ decrescente.

ovvero per i tratti AC e CD. Tale procedura deriva da un postulato fondamentale che si
enuncia come segue e prende il nome di ‘principio di sezionamento’:

Postulato 1 Un corpo C è in equilibrio se e solo se ogni parte C_0 C è in equilibrio se soggetta al sistema di forze attive F_a direttamente agente su C_0 ed al sistema di forze

z
y
A B
q
z
y
L
4
A B
q L
4
L
4
L
4
L
4
q L
4
q L

2
q L
2
L
2
L
2
q

Figura 1.31: Trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito a risultante nulla.

reattive F_r che il mondo esterno a C_0 esplica su C_0. Il sistema F_r è in generale a sua volta costuito dalla somma delle reazioni dei vincoli esterni direttamente applicati su C_0 e dalle reazioni interne che $C - C_0$ esplica su C_0.

Il principio di sezionamento va utilizzato più volte, in generale, al fine di assicurare che ciascuna parte C_0 C sia in equilibrio. In particolare, per determinare le reazioni vincolari esterne ed interne, bisogna assumere di volta in volta C_0 coincidente con un tratto, oppure con l'insieme di più tratti. Pertanto il procedimento già descritto nella sezione 1.3.1 prevede di ripetere più volte la seguente sequenza di operazioni:

• Determinare il corpo C_0 per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
• Determinare il sistema di forze F agente su tale corpo. Esso sarà costituito dalla somma del sistema di tutte le forze e coppie esterne (note) direttamente agenti su C, detto sistema di forze attive F_a, e del sistema di tutte le reazioni (incognite) che il mondo esterno a C_0 esplica su C_0, detto sistema delle forze reattive F_r.
• Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $F = F_a + F_r$.

z
y
L L/2
A C
L/2
B
F
L
D

Figura 1.32: Travatura composta da due tratti.

Si consideri allora l'equilibrio del tratto AC. Essendo chiaro il soggetto da equilibrare bisogna ora determinare il sistema di forze agente su AC. Non essendoci forze attive bisognerà solo considerare le reazioni vincolari. D'altra parte, per isolare il tratto AC bisogna idealmente effettuare dei tagli in A, B e C e considerare le interazioni che in tali punti nascono con il mondo esterno. Tali interazioni sono le reazioni del vincolo esterno doppio in A e di quello esterno semplice in B, e la reazione del vincolo interno doppio in C sul tratto AC. Si ottiene dunque lo schema di figura 1.33. Analogamente, considerando l'equilibrio del tratto CD bisogna effettuare dei tagli in C ed in D e si ottiene lo schema di figura 1.34. Nei due schemi si è tenuto conto del principio di azione e reazione per il quale, con i versi positivi assunti in figura, si ha: $R^{II}_{yC} = R^{I}_{yC}$ e $R^{II}_{zC} = R^{I}_{zC}$. I due schemi portano al seguente sistema di sei equazioni in sei incognite:

equilibrio tratto AC

$$\begin{cases} R_{zA} + R^{I}_{zC} = 0 \\ R_{yA} + R_B + R^{I}_{yC} = 0 \\ -R_B L - R^{I}_{yC}\, 2L = 0 \end{cases} \qquad (1.15)$$

equilibrio tratto CD

$$\begin{cases} -R^{II}_{zC} = 0 \\ -R^{II}_{yC} + F + R_D = 0 \\ -F\dfrac{L}{2} - R_D L = 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

Le $(1.15)_1$ e $(1.16)_1$ sono equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale; le $(1.15)_2$ e $(1.16)_2$ sono di equilibrio alla traslazione verticale; le $(1.15)_3$ e $(1.16)_3$ sono di equilibrio alla rotazione intorno, rispettivamente, ad A e a C.

z
y
L L/2
A C
L/2
B
F
L
Tagli
z

y
L
A B C
L
R_{yA} R_B R_{yC}
R_{zA} R_{zC}
I
I
D
Figura 1.33: Equilibrio del tratto AC.

Si vede chiaramente che l'equilibrio del tratto CD coinvolge solamente le tre reazioni incognite R^{II}_{zC}, R^{II}_{yC} e R_D per cui le (1.16) possono essere risolte indipendentemente

z
y
L L/2
A C
L/2
B
F
L
Tagli
R_D
R_{zC}
II
R_{yC}
II
L/2 L/2
D
F
Figura 1.34: Equilibrio del tratto CD.

dalle (1.15), in modo da determinare preliminarmente R^{II}_{zC}, R^{II}_{yC} e R_D:

$$R^{II}_{zC} = 0 \qquad R^{II}_{yC} = \frac{F}{2} \qquad R_D = -\frac{F}{2} \tag{1.17}$$

e quindi sostituire i valori $R^{I}_{yC} = R^{II}_{yC} = F/2$ e R^{I}_{z}

$_C = R_{II}$
$_{zC} = 0$ nelle (1.15) per
ricavare le altre tre incognite:

$$R_{zA} = 0 \quad R_B = -F \quad R_{yA} = \frac{F}{2} \qquad (1.18)$$

Si riporta dunque la soluzione in figura 1.35 disegnando le forze con il loro verso effettivamente ottenuto in soluzione. Pertanto i valori indicati a fianco rappresentano i moduli delle forze stesse.

1.4 Le caratteristiche della sollecitazione

Si consideri la trave appoggiata con una forza verticale in mezzeria, le cui reazioni vincolari sono riportate in figura 1.36.a.

Si immagini di effettuare un taglio nella sezione S in figura. Tale taglio è effettuato in un punto di continuità, dove esiste un vincolo triplo che trasmette due reazioni mutue tra le facce sinistra e destra del taglio, ognuna delle quali può essere decomposta in due forze non parallele passanti per il baricentro di S ed in una coppia.

In particolare si può decomporre ognuna delle due reazioni in due componenti una parallela ed un'altra ortogonale all'asse, ed in una coppia. Tali componenti vengono dette 'caratteristiche della sollecitazione'. La componente parallela all'asse è detta

L L L/2 L/2
A B C
F
F2
F2
F2
F2
F
D

Figura 1.35: Reazioni vincolari.

F
z
y
L/2 L/2
A B
F2
B
F2
S_d
d
F
A

F2
S_s
N T
M
F2
S
d
B
F2
S_d
d
T
M
(c) N
(b)
(a)
F
A
F2
S_s
N
M
T
L - d

Figura 1.36: Determinazione di N, M e T in S.

‘sforzo normale’ ed è indicata con N, quella ortogonale è detta ‘taglio’, o anche ‘sforzo di taglio’, ed è indicata con T, la coppia è detta ‘momento flettente’, o semplicemente ‘momento’, ed è indicata con M.

Il taglio effettuato in S definisce due ‘facce’ S_s ed S_d rispettivamente a sinistra ed a destra del taglio (figura 1.36.b). Le componenti delle reazioni di S_s su S_d sono quindi

uguali ed opposte a quelle di S_d su S_s.

Per quanto riguarda i segni si conviene di assumere positive le caratteristiche della sollecitazione se le componenti della reazione di S_d su S_s, cioè quelle sulla faccia di sinistra del taglio, sono concordi agli assi del riferimento. Equivalentemente le caratteristiche sono positive se le componenti della reazione di S_s su S_d, cioè quelle sulla faccia di destra del taglio, sono discordi agli assi del riferimento. In figura 1.36.b si sono riportati i versi delle forze e delle coppie corrispondenti alle caratteristiche della sollecitazione assunte positive.

Per determinare il valore delle caratteristiche della sollecitazione nella sezione S, ed analogamente in qualsiasi altra sezione della trave, non bisogna introdurre concetti e metodi nuovi ma applicarne alcuni già oramai noti. Infatti, come si è già detto, le caratteristiche della sollecitazione possono semplicemente riguardarsi quali reazioni di un vincolo triplo interno, e possono dunque calcolarsi come tali applicando il principio di sezionamento e seguendo la sequenza di operazioni introdotta inizialmente nella sezione 1.3.1.

Avendo però già calcolato le reazioni vincolari esterne, queste ultime sono oramai forze note per cui conviene riformulare il principio di sezionamento come segue:

Postulato 2 Un corpo C è in equilibrio se e solo se ogni parte C_0 C è in equilibrio.

Il sistema di forze agente F agente su C_0 è decomponibile in un sistema di forze note F_n, dato da tutte le forze attive direttamente agenti su C_0 e dalle reazioni già calcolate agenti su C_0, ed in sistema di forze incognite F_i, tutte reattive.

Evidentemente, nel problema in esame il sistema di forze incognite F_i rappresenta proprio le caratteristiche della sollecitazione in S.

Il principio di sezionamento così riformulato andrà poi applicato tante volte quante sono le sezioni nelle quali si vuole calcolare le caratteristiche della sollecitazione, ripetendo più volte la solita sequenza di operazioni, che qui si specializza come segue:

- Determinare il corpo C_0 per il quale si vuole imporre l'equilibrio.
- Determinare il sistema di forze F agente su C_0 e decomporlo nel sistema di forze note F_n e quello di forze incognite F_i rappresentato dalle caratteristiche della sollecitazione.
- Scrittura e soluzione delle equazioni cardinali della statica per il sistema di forze $F = F_n + F_i$.

Dunque, per il calcolo delle carratteristiche in S, si può assumere quale C_0 sia il tratto AS che, equivalentemente, il tratto SB.

Si consideri prima il secondo caso, ovvero si scelga come corpo C_0 il tratto SB. Il sistema di forze su esso agente è costituito dalla reazione vincolare in B, che è stata determinata e quindi è nota, e dalle tre caratteristiche della sollecitazione intese come reazioni di S_s su S_d. Si ottiene dunque lo schema di figura 1.36.c e, imponendo gli

equilibri alla traslazione nelle direzioni z ed y e l'equilibrio alla rotazione intorno a S:

8>
>>><>>>>:
$N = 0$
$-T -$

$$\frac{F}{2} = 0$$

$$-M + \frac{F}{2} d = 0 \qquad (1.19)$$

si ottengono i valori:

$$N = 0 \quad T = -\frac{F}{2} \quad M = \frac{F}{2} d \qquad (1.20)$$

Si lascia per esercizio la verifica che gli stessi valori si ottengono imponendo l’equilibrio del tratto AS.

Poiché le (1.20) sono state ottenute con riferimento ad una generica sezione a destra della forza concentrata in mezzeria si ricava che tra la forza F ed il punto B lo sforzo normale è identicamente nullo, lo sforzo di taglio T è costante ed uguale a $-F/2$, mentre il momento flettente varia linearmente con la distanza d dal carrello in B, annullandosi proprio in B ed assumendo il valore massimo $F L/4$ sulla sezione di mezzeria.

Considerando ora una sezione generica S_0 alla sinistra della forza F si ottiene lo schema di figura 1.37. Imponendo l’equilibrio di uno qualunque dei tratti AS_0 e S_0B si ricavano i seguenti valori delle caratteristiche della sollecitazione:

$$N = 0 \quad T = \frac{F}{2} \quad M = \frac{F}{2} d_0 \qquad (1.21)$$

F
z
y
L/2 L/2
A B
F2
B
F2
N
M
T
d'
F

A
F2
F2
S'
d'
(b)
(a)
S'_s S'_d
Figura 1.37: Determinazione di N, M e T in S_0.
Poiché le (1.21) sono state ottenute con riferimento ad una generica sezione a sinistra
della forza concentrata in mezzeria si ricava che tra il punto A e la forza F lo sforzo

normale è identicamente nullo, lo sforzo di taglio T è costante ed uguale a F/2, mentre
il momento flettente varia linearmente con la distanza d_0 dal carrello in A, annullandosi
proprio in A ed assumendo il valore massimo F L/4 sulla sezione di mezzeria.
I diagrammi del momento e del taglio così ottenuti sono rappresentati in figura 1.38.
Per essi si è seguita e si seguirà in seguito la convenzione di riportare il diagramma del
momento flettente M verso il basso se positivo, e quello del taglio T verso l’alto se
positivo.
F
z
y
L/2 L/2
A B
(a)
M(z)
F L
4
T(z)
F2
F2
C
Figura 1.38: Trave appoggiata con una forza verticale in mezzeria: diagrammi di M e
T.
Nel semplice esempio precedente si è illustrato come le caratteristiche della sollecitazione
vadano viste alla stregua di reazioni vincolari interne relative al vincolo triplo di
continuità. In una struttura isostatica, essendo possibile ricavare il valore delle reazioni
vincolari e quindi il sistema di tutte le forze esterne, attive e reattive, che caricano la
struttura, è dunque anche possibile ricavare le caratteristiche della sollecitazione in qualsiasi
sezione, anche per problemi più complessi di quello visto in precedenza,

mediante l’utilizzo di sole considerazioni di equilibrio.
Si osserva anche che l’ipotesi fatta fino ad ora che ognuno dei tratti sia monoconnesso è essenziale affinché per ogni punto della travatura risulti possibile con opportuni tagli estrarre una parte in cui, note le reazioni vincolari esterne ed interne, le uniche incognite rimangono le caratteristiche della sollecitazione nel punto stesso. In figura 1.39 è riportato invece il caso di una travatura costituita da un tratto biconnesso. Pur calcolando le reazioni vincolari, se si effettua un taglio in S ci si accorge che non è possibile effettuarne un secondo in modo da estrarre un pezzo il cui equilibrio consenta di calcolare le caratteristiche della sollecitazione in S. Si intuisce dunque che in qualche modo una maglia chiusa introduce ulteriori elementi di indeterminazione nel problema dell’equilibrio, ovvero ulteriori iperstaticità.

F
S
A B
A B
F
$R_A R_B$
Figura 1.39: Esempio di travatura con una maglia chiusa.

1.4.1 Equazioni differenziali dell’equilibrio interno

In questa sezione si deriveranno delle relazioni differenziali per le funzioni M, T ed N imponendo l’equilibrio di una porzione elementare generica di trave, detta anche ‘concio elementare’. A tale scopo, si consideri nella trave di figura 1.40 la parte di trave contenuta tra le sezioni alle ascisse z e z + z, di lunghezza z. Si faccia poi l’ipotesi che sulla trave siano applicati un carico distribuito q diretto trasversalmente ed uno p diretto secondo l’asse della trave, e che le funzioni q e p siano continue in [z, z + z].
Nell’estrarre il concio elementare si sono evidentemente effettuati due tagli alle ascisse z e z + z per cui il sistema di forze agenti sul concio è costituito dai carichi distribuiti q e p e dalle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni dove sono stati effettuati i tagli.
Per scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale e alla rotazione intorno al baricentro della sezione di ascissa z conviene decomporre i carichi

q e p nella somma di un valore costante, pari a quello assunto in z, ed una parte variabile.
E’ facile mostrare che il contributo di tale parte variabile nelle equazioni di equilibrio
è un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli atri termini, e che può essere dunque
tralasciato. Pertanto, nello scrivere le suddette equazioni, si assumerà direttamente che
sul concio elementare siano presenti carichi uniformi di intensità q(z) e p(z), ottenendo
relazioni esatte anche per carico variabile.
Si ottiene allora:

8>>><>
>>:

$$N(z + z) - N(z) + p(z)\, z = 0$$
$$T(z + z) - T(z) + q(z)\, z = 0$$
$$-T(z + z)\, z + M(z + z) - M(z) - q(z) \frac{z^2}{2} = 0$$

(1.22)

z
y
A B
q(z)
z
p(z) (Applicato
sull'asse della
trave)
z + Δ z
N(z + Δ z)
M(z + Δ z)
T(z + Δ z)
N(z)
M(z)
T(z)
p(z)
q(z)
Δ z
(è lecito trascurare
la parte variabile)

Figura 1.40: Equilibrio del concio elementare.

Dividendo per z e passando al limite per z ! 0 si ottiene:

$$N_0(z) + p(z) = 0 \quad T_0(z) + q(z) = 0 \quad M_0(z) - T(z) = 0 \quad (1.23)$$

ovvero, sottointendendo la dipendenza da z:

8>><>
>:

$$N_0 = -p$$
$$T_0 = -q$$
$$M_0 = T$$

(1.24)

Derivando la terza e sostituendo nella seconda si ottiene anche la relazione:
$M_{00} = -q$ (1.25)
Le (1.24) sono le equazioni differenziali dell'equilibrio interno per la trave. Esse sono valide in tutti i punti in cui le funzioni q e p sono continue e vanno combinate con
opportune condizioni al contorno per determinare le funzioni incognite N, T e M.
Si nota che nei tratti in cui il carico q è nullo dalle (1.24) si ricava che il taglio è costante ed il momento flettente è lineare, mentre quando q è non nullo ma costante il
taglio è lineare ed il momento flettente è una funzione quadratica, ovvero una parabola.

1.4.2 Un esempio di soluzione analitica delle equazioni differenziali di equilibrio

Si è visto in precedenza come determinare i diagrammi del momento e del taglio su una
trave appoggiata con una forza verticale concentrata in mezzeria scrivendo direttamente
le equazioni di equilibrio per un elemento generico di trave. Più in generale, una volta
determinate le reazioni vincolari, è possibile determinare le caratteristiche della sollecitazione
senza risolvere in modo completamente analitico le equazioni differenziali (1.24) e le condizioni al contorno, come si vedrà in seguito.
In questa sezione si vuole invece mostrare come sia possibile risolvere il problema
il problema precedente mediante la soluzione analitica delle (1.24) e delle relative
condizioni al contorno senza preliminarmente ricavare le reazioni vincolari.
Con riferimento alla figura 1.36, si osserva che il carico q è discontinuo in z = L/2,
per cui le $(1.24)_{2-3}$ vanno integrate negli intervalli [0, L/2[e]L/2, L], in cui il carico q
è identicamente nullo. La $(1.24)_1$ può invece direttamente essere integrata in tutto [0, L]
essendo il carico p nullo su tutta la trave e quindi continuo.
Si ricavano dunque le espressioni:
8>
>>>>>><>>>>>>>:
$N(z) = c_1$ z 2 [0, L]
$T(z) = c_2$ z 2 [0, $\frac{L}{2}$[
$T(z) = c_3$ z 2]$\frac{L}{2}$, L]
$M(z) = c_2 z + c_4$ z 2 [0, $\frac{L}{2}$[
$M(z) = c_3 z + c_5$ z 2]$\frac{L}{2}$, L]
(1.26)
Le condizioni al contorno si scrivono, per ognuna delle caratteristiche della

sollecitazione,
in tutti i punti estremi degli intervalli di validità delle (1.26) in cui non esiste un vincolo la cui reazione incognita renda impossibile a priori definire una condizione per la caratteristica stessa. In altre parole, per la soluzione analitica delle equazioni differenziali di equilibrio non bisogna preliminarmente calcolare le reazioni vincolari. Esse vanno considerate in questa fase della soluzione delle incognite.
Nel caso in esame, per esempio, non si potrà scrivere una condizione per lo sforzo normale in $z = 0$ in quanto esso è pari alla reazione orizzontale in A, che come si è detto va considerata incognita (sebbene in questo esempio sia talmente immediata da calcolare che risulta difficile pensarla non nota). La condizione al contorno per lo sforzo normale va scritta invece in B, ovvero per $z = L$, dove non essendoci alcuna forza orizzontale applicata sarà necessariamente $N(L) = 0$.
Analogamente, in A e B non potranno scriversi condizioni per il taglio in quanto sono lì presenti le reazioni incognite verticali che, con il segno opportuno, forniscono proprio il taglio in A ed in B. Il momento flettente, invece, in A ed in B si deve annullare qualsiasi sia il valore delle reazioni dei vincoli. Ciò fornisce le condizioni $M(0) = 0$ e $M(L) = 0$.
Altre due condizioni si ricavano poi nella sezione C di mezzeria. Infatti dall'equilibrio del concio a cavallo di tale sezione (figura 1.41), facendo tendere a zero l'ampiezza

T_{sC}

T_{dC}

M_{dC}

M_{sC}

F

Figura 1.41: Equilibrio dell'intorno di C.

del concio stesso si ricavano le relazioni:

$$T_{dC} - T_{sC} + F = 0 \qquad M_{dC} - M_{sC} = 0 \qquad (1.27)$$

dove:

$$T_{sC} = \lim_{z \to \frac{L}{2}^-} T(z) = T\left(\frac{L}{2}^-\right) \qquad T_{dC} = \lim_{z \to \frac{L}{2}^+} T(z) = T\left(\frac{L}{2}^+\right)$$

$^{+}$ (1.28)

$$M_{sC} = \lim_{z \to \frac{L}{2}^{-}} M(z) = M\left(\frac{L}{2}^{-}\right) \qquad M_{dC} = \lim_{z \to \frac{L}{2}^{+}} M(z) = M\left(\frac{L}{2}^{+}\right) \tag{1.29}$$

Si evince dalle (1.27)-(1.29) che il momento è continuo in $z = L/2$ mentre il taglio ha una discontinuità $T_C = T_{dC} - T_{sC}$ di ampiezza pari e segno opposto alla forza verticale F applicata. Riassumendo, le cinque condizioni ai limiti sono:

$$N(L) = 0 \quad M(0) = 0 \quad M(L) = 0 \quad M\left(\frac{L}{2}^{-}\right) = M\left(\frac{L}{2}^{+}\right) \quad T\left(\frac{L}{2}^{+}\right) - T\left(\frac{L}{2}^{-}\right) = -F \tag{1.30}$$

Esse sono 5 condizioni indipendenti pari al numero di costanti di integrazione da cui dipende la soluzione del problema dell'equilibrio. La soluzione di tale problema quindi esiste ed è unica in accordo con il fatto che la trave è isostatica. In particolare sostituendo le espressioni (1.26) nelle (1.30) condizioni si ottiene:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_3 L + c_5 = 0 \\ c_2 \dfrac{L}{2} + c_4 = c_3 \dfrac{L}{2} + c_5 \\ c_3 - c_2 = -F \end{cases} \tag{1.31}$$

la cui soluzione è:

$c_1 = 0 \quad c_2 =$

F

2

$$c_3 = -\frac{F}{2} \qquad c_4 = 0 \qquad c_5 = \frac{F\,L}{2} \tag{1.32}$$

e quindi le espressioni:

$$\begin{cases} N(z) = 0 & z \in [0, L] \\ T(z) = \frac{F}{2} & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ T(z) = -\frac{F}{2} & z \in]\frac{L}{2}, L] \\ M(z) = \frac{F}{2} z & z \in [0, \frac{L}{2}[\\ M(z) = -\frac{F}{2} z + \frac{F\,L}{2} & z \in]\frac{L}{2}, L] \end{cases} \tag{1.33}$$

Le (1.33) sono le espressioni analitiche dei diagrammi del momento e del taglio ricavati in figura 1.38.

1.4.3 Un’interpretazione della convenzione sul tracciamento del diagramma del momento

Si è già osservato che le caratteristiche della sollecitazione in una sezione della trave ricavate nella modellazione monodimensionale rappresentano in qualche modo un informazione mediata sulla sezione dello stato di sollecitazione presente sulla sezione stessa. Per avere informazioni sullo stato di sollecitazione in ogni punto della sezione è

necessario utilizzare una modellazione tridimensionale.
In una modellazione tridimensionale e nelle ipotesi di comportamento elastico lineare
ad un momento flettente positivo corrisponde uno stato di sollecitazione puntuale per
il quale le fibre parallele a z disposte dalla parte di y positivo sono tese nella direzione
di z, mentre le fibre parallele a z disposte dalla parte di y negativo risultano compresse
nella direzione di z. In figura 1.42 è mostrato il tipo di diagramma di tensioni, ovvero
di forze per unità di superficie, dirette secondo z che nascono in una sezione soggetta
ad un momento positivo. Tale considerazione non può essere dimostrata e puntualizzata
rigorosamente in questo punto della trattazione ed è dunque da accettare più dal punto
di vista intuitivo. Essa però fornisce un’utile interpretazione fisica della convenzione
adottata per il tracciamento del diagramma del momento, per la quale si usa dire che le
ordinate del diagramma sono tracciate ‘dalla parte delle fibre tese’.
M > 0
Fibre tese
Fibre compresse
Il diagramma del momento viene
tracciato dalla parte delle fibre tese
z
y
Figura 1.42: Fibre tese e fibre compresse.

1.4.4 Condizioni al contorno

Si è visto che alle equazioni differenziali di equilibrio vanno affiancate condizioni al
contorno. Esse si scrivono negli estremi di ciascuno degli intervalli in cui si divide l’intero
dominio che, nel caso in esame di travi ad asse rettilineo, può assumersi concidente
a sua volta con un intervallo [0, L] di <.
A titolo di esempio si consideri la trave di figura 1.43. Le forze verticali e le coppie,
attive o reattive che siano, vanno considerate quali discontinuità[8] per il carico trasversale
q. Pertanto i punti di discontinuità di q sono le ascisse z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_8 e z_{10}
e dunque per l’integrazione delle $(1.24)_{2-3}$ bisogna dividere l’intervallo [0, L] negli 8
intervalli $]0, z_1[$, $]z_1, z_2[$, $]z_2, z_3[$, $]z_3, z_4[$, $]z_4, z_6[$, $]z_6, z_8[$, $]z_8, z_{10}[$ e $]z_{10}, L[$. In ognuno

[8]La dimostrazione di questo fatto non viene data in quanto essa richiederebbe una rigorosa formalizzazione matematica dei concetti di forza e coppia concentrate che esula dalla presente trattazione.

degli intervalli l’integrazione indefinita delle $(1.24)_{2-3}$ fornisce le funzioni M e T a
meno di due costanti di integrazione. Gli intervalli sono presi aperti perché in

generale
M e T possono essere discontinue nei loro estremi. Per ognuna delle ascisse z_i peraltro si indicheranno brevemente con M_s e T_s e con M_d e T_d i limiti sinistri e destri rispettivamente delle funzioni momento e taglio.
Le discontinuità per il carico assiale p sono in z_9 ed in z_{10}, per cui per l'integrazione della $(1.24)_1$ bisogna dividere l'intervallo [0, L] nei tre intervalli]0, z_9[,]z_9, z_{10}[e]z_{10}, L[, in ognuno dei quali si ricava N a meno di una costante di integrazione.
In totale, l'integrazione indefinita delle (1.24) fornisce N, M e T a meno di $2 \times 8 + 3 = 19$ costanti di integrazione a cui dovranno corrispondere 19 condizioni al contorno.
□

Figura 1.43: Un esempio di scrittura delle condizioni al contorno.
In z = 0 ed in z = L, ovvero negli estremi della trave, vanno scritte tante condizioni quante sono le componenti non vincolate. Per ogni componente non vincolata infatti, non essendoci una reazione vincolare, la corrisponente forza applicata o è nulla oppure è una forza o una coppia nota. Pertanto la corrispondente caratteristica della sollecitazione o è nulla oppure comunque è nota. Ad esempio, imponendo l'equilibrio per il tratto tra le ascisse 0 e z, al tendere a 0 di z il contributo del carico distribuito q diventa un infintesimo di ordine superiore e le forze e la coppia concentrate forniscono direttamente le caratteristiche della sollecitazione in z = 0 (figura 1.44):
$N(0) = -H \quad T(0) = -F \quad M(0) = -M \quad (1.34)$
Un modo pratico per arrivare alla scrittura di tali condizioni si ottiene considerando che, essendo la trave alla destra dell'ascissa z = 0, le forze F e H e la coppia M ivi applicate possono essere viste quali le azioni applicate sulla faccia destra di un taglio.
Considerate in tal modo direttamente quali caratteristiche della sollecitazione esse sono tutte negative in segno in quanto sono concordi agli assi del riferimento.

In modo analogo si possono scrivere le condizioni in $z = L$ considerando le azioni
ivi applicate direttamente quali caratteristiche della sollecitazione agenti sulla faccia
sinistra di un taglio. Essendo concordi con gli assi del riferimento esse sono positive in
segno e si ottiene dunque:

$$N(L) = H \quad T(L) = F \quad M(L) = M \qquad (1.35)$$

□

Figura 1.44: Condizioni in $z = 0$.

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_1, ovvero del punto di applicazione
di un carrello, si ricava invece (figura 1.45):

$$\text{in } z_1: \; M_s = M_d \qquad (1.36)$$

mentre non può scriversi alcuna condizione sul taglio in quanto la differenza di taglio
è legata alla reazione vincolare che, nel procedimento analitico, va considerata come
incognita. La (1.36) è in generale la condizione da scrivere in prossimità di un carrello
con piano di scorrimento parallelo all'asse della trave.

z_1
Δz
Δz 0
z_1
T_d T_s
M_s M_d
R

Figura 1.45: Condizioni in z_1.

Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_2, dove è applicata la forza
verticale F, si ricava invece (figura 1.46):

in z_2: 8<:

$$M_s = M_d$$

$$T = T_d - T_s = -F$$

(1.37)
che sono in generale le condizioni in corrispondenza di una forza trasversale concorde
all'asse y.
Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_4, dove è applicata la coppia
M, si ricava invece (figura 1.47):
in z_4: 8<:
$M = M_d - M_s = -M$
$T_s = T_d$
(1.38)
G. Alfano - Travature piane 39
F
z_2
Δz
Δz 0 T_d T_s
M_s M_d
z_2
F
Figura 1.46: Condizioni in z_2.
che sono in generale le condizioni in corrispondenza di una coppiaMantioraria.
□

□
Figura 1.47: Condizioni in z_4.
Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_6, dove esiste una discontinuità
del carico q ma non vi è alcuna forza concentrata trasversale o coppia applicata, si
ricava (figura 1.48):
in z_6: 8<:
$M_s = M_d$
$T_s = T_d$
(1.39)
che sono in generale le condizioni di continuità per il momento e per il taglio che sussistono
in qualsiasi punto in cui non vi siano forze concentrate trasversali o coppie applicate.
Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_{10}, ovvero del punto di applicazione
del doppio pendolo esterno, si ricava (figura 1.49):
in z_{10}: $T_s = T_d$ (1.40)
mentre non può scriversi alcuna condizione sul momento in quanto la differenza di
momento è legata al coppia reattiva del doppio pendolo che, nel procedimento

analitico,
va considerata come incognita. La (1.40) è in generale la condizione da scrivere in
prossimità di un doppio pendolo avente gli assi dei pendoli paralleli a quello della trave.
Considerando l'equilibrio di un intorno elementare di z_9, dove esiste una discontinuità
del carico assiale p ma non vi è alcuna forza concentrata assiale, si ricava (figura

z_6
Δz
Δz 0 T_d T_s
M_s M_d
z_6
q
Figura 1.48: Condizioni in z_6.

!
Figura 1.49: Condizioni in z_{10}.
1.50):
in z_9: $N_s = N_d$ (1.41)
che è in generale la condizione di continuità per lo sforzo normale che sussiste in
qualsiasi punto in cui non vi sia una forza concentrata assiale.
z_9
Δz
Δz 0
N_d
z_9
N_s
Figura 1.50: Condizioni in z_9.
Le ascisse z = 5 e z = 7 non rappresentano punti di discontinuità del carico esterno
e pertanto non conviene in tali ascisse spezzare ulteriormente il dominio di integrazione.
In tali ascisse però vanno scritte le condizioni corrispondenti al vincolo interno ivi
presente. In particolare in z = 5 (cerniera) il momento è nullo, mentre in z = 7 (doppio
pendolo interno) è il taglio ad essere nullo.
Considerando anche le altre condizioni analoghe a quelle considerate finora si ottenG.

gono in definitiva le seguenti relazioni:
in z = 0: $N(0) = -H$ $T(0) = -F$ $M(0) = -M$
in z_1: $M_s = M_d$

in z_2: 8<:
$M_s = M_d$
$T = -F$
in z_3: $M_s = M_d$
in z_4: 8<:
$M = -M$
$T_s = T_d$
in z_5: $M = 0$
in z_6: 8<:
$M_s = M_d$
$T_s = T_d$
in z_7: $T = 0$
in z_8: $M_s = M_d$
in z_9: $N_s = N_d$
in z_{10}: $T_s = T_d$
in $z = L$: $N(L) = H$ $T(L) = F$ $M(L) = M$
(1.42)

Nell’esempio considerato non si sono esaurite tutte le possibili condizioni al contorno che può capitare di dover scrivere in altri problemi, ma i ragionamenti svolti consentono, opportunamente combinati tra loro, di affrontare tutti i problemi di statica relativi alle travi ad asse rettilineo.

Quando non si vuole procedere con il procedimento analitico di integrazione delle equazioni differenziali, ma bensì si calcolano preliminarmente le reazioni vincolari e quindi si determinano le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione mediante il principio di sezionamento, le considerazioni svolte in questa sezione sono comunque di grande aiuto come strumento di verifica. Infatti, una volta note le reazioni vincolari, si può riguardare la travatura in esame quale una struttura priva di vincoli e soggetta solamente a carichi noti. Vale pertanto quanto segue:

• Su un estremo di una trave lo sforzo normale è pari in modulo alla componente assiale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); lo sforzo di taglio è pari in modulo alla componente trasversale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); il momento flettente è pari in modulo alla coppia ivi applicata (attiva

o reattiva che sia). I segni si determinano vedendo l’estremo della trave quale faccia destra o sinistra di un taglio e le azioni ivi applicate direttamente quali caratteristiche della sollecitazione, e utilizzando le convenzioni solite per i segni di queste ultime.

• Conseguenza ovvia di quanto sopra detto è che su un estremo di una trave lo sforzo normale è nullo se è nulla la componente assiale della forza ivi applicata

(attiva o reattiva che sia); lo sforzo di taglio è nullo se è nulla la componente trasversale della forza ivi applicata (attiva o reattiva che sia); il momento flettente
è nullo se è nulla la coppia ivi applicata (attiva o reattiva che sia).

• Una forza trasversale F applicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto T = −F, avendo assunto F positiva se diretta secondo l'asse y. Graficamente nel diagramma del taglio ciò si traduce in un salto di modulo pari e nello stesso verso della forza stessa.

• Una coppiaMapplicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto M = −M, avendo assunto M positiva se antioraria. Graficamente nel diagramma del momento
ciò si traduce in un salto, discorde a y (cioè verso l'alto nel caso di trave orizzontale con y diretto verso il basso, come si è fatto solitamente) se la coppia
è antioraria, e concorde a y se la coppia è oraria, e pari in modulo a quello della coppia stessa.

• Una forza assiale H applicata sulla trave corrisponde sempre ad un salto N = −H, avendo assunto H positiva se diretta secondo l'asse z.

In virtù delle convenzioni fatte ulteriori verifiche sul tracciamento dei diagrammi del
taglio e del momento possono farsi tenendo conto di quanto segue:

• In corrispondenza di un carico distribuito la curvatura del diagramma del momento
ha lo stesso verso di quella che avrebbe la configurazione deformata di un filo soggetto allo stesso carico.

• In corrispondenza di una forza trasversale concentrata il diagramma del momento
presenta una cuspide dello stesso verso di quella che caratterizzerebbe la configurazione
deformata di un filo soggetto alla stessa forza.

• In corrispondenza di una cerniera non caricata né a destra né a sinistra da una
coppia il momento è nullo[9].

• In corrispondenza di un doppio pendolo interno non caricato né a destra né a sinistra da una forza il taglio è nullo.

• In ogni punto in cui il taglio è nullo il diagramma del momento è stazionario, cioè
ha la tangente parallela alla fondamentale, quindi orizzontale nel caso di trave ad
asse rettilineo orizzontale.

[9]I casi di una cerniera e di un dopppio pendolo interno caricati si prenderanno in esame nel seguito.

1.4.5 Esercizi sulle travi ad asse rettilineo orizzontale

Negli esercizi che seguono si tracciano i diagrammi del momento e del taglio per alcune
travi isostatiche ad asse rettilineo calcolando preliminarmente le reazioni vincolari e
quindi utilizzando nel modo più conveniente sia il principio di sezionamento che le
informazioni che si possono ottenere in base all'integrazione indefinita delle (1.24). Gli

esercizi 1-14 servono anche a studiare i casi di vincoli interni caricati da forze o da
coppie.

Problema 1

Si consideri la trave di figura 1.51.

L
B
A F
C
$_1$ L$_2$
d

Figura 1.51: Problema 1: geometria, vincoli e carichi.

Per il calcolo delle reazioni vincolari conviene partire dall'equilibrio del tratto BC.
Scrivendo le tre equazioni cardinali della statica per tale tratto si ottengono i valori della
reazione della cerniera interna in B sul tratto BC e del carrello in C riportati in figura
1.52.

L
B
A F
C
$_1$ L$_2$
d
B
F
C
L$_2$
d
L $_2$ - d F
L$_2$
d F
L$_2$

Figura 1.52: Equilibrio del tratto BC.

Nota la reazione della cerniera in B sul tratto BC, essendo la cerniera non caricata
la sua reazione sul tratto AB è quella uguale e contraria e quindi è anch'essa nota.

Nell'equilibrio del tratto AB rimangono dunque solo tre incognite che possono essere
determinate con le tre equazioni cardinali della statica. I loro valori sono stati riportati
in figura 1.53. I valori delle reazioni dei vincoli esterni ed interni ottenuti per tutta la
trave sono stati riportati in figura 1.54.

L
B
A F
C
$_1$ L$_2$
d

d F
L2
L 2 - d F
L2
L 2 - d F
L L2
B
1
L 2 - d F
L2
L1
B
L 2 - d F
L2
F L 2 - d
L2
L1
(a)
(b)
(c)
A
A
Figura 1.53: Equilibrio del tratto AB.
L
B A F
C
1 L2
d d F
L2
L 2 - d F
L2
F L 2 - d
L2
L1
L 2 - d F
L2
Figura 1.54: Reazioni dei vincoli esterni ed interni.
Per il tracciamento dei diagrammi della sollecitazione interna si osserva preliminarmente
che, non essendo presente alcuna componente assiale delle forze attive e reattive,
lo sforzo normale è identicamente nullo. Per calcolare il momento flettente ed il taglio

nel tratto tra la forza F e la sezione C si considera una sezione generica S compresa in
tale tratto, ad una distanza a da C. Si impone dunque l’equilibrio del tratto SC. A tale
scopo si seziona in S ed in C (figura 1.55.a) e, non essendovi azioni esterne direttamente
applicate, le uniche azioni presenti sono la reazione del vincolo esterno in C, che è

nota, e le caratteristiche della sollecitazione in S.
Per calcolare il momento in S si scrive dunque un’equazione di equilibrio alla rotazione
intorno a S. In tale equazione lo sforzo normale (comunque nullo in questo caso) ed il taglio non intervengono in quanto per definizione passanti per S e per tale
motivo sono stati riportati in grigio in figura 1.55.b. Si ottiene il valore del momento
$M_S = \frac{F}{L_2} d\, a$, da cui si deduce che il momento varia linearmente tra S e C annullandosi in C. Circa il segno del momento, esso è positivo in quanto sulla faccia destra del taglio
in S è una coppia oraria. Pertanto, assumendo l’asse della trave come fondamentale e
avendo assunto per convenzione di riportare il diagramma del momento concordemente
ad y se positivo, cioè verso il basso in questo caso, si ricava il diagramma nel tratto SC
riportato in figura 1.55.c.

L
B
A F
C
$_1$ L_2
d d F
L_2
L_2 - d F
L_2
F L_2 - d
L_2
L_1
L_2 - d F
L_2
S
S C
d F
L_2
Equilibrio alla M_S
rotazione intorno a S
$M_S = F \frac{d}{L_2}$
a
a
F
C
Diagramma del
momento tra il punto di
applicazione di F e C
(a)
(b)
(c)
M(z)
z
F d

L2
(L 2 - d)

Figura 1.55: Calcolo del momento nel tratto tra la forza F ed il punto C.

Analogamente, per calcolare il taglio in S si scrive un'equazione di equilibrio alla traslazione verticale per il tratto SC. In tale equazione lo sforzo normale ed il momento flettente non intervengono e per tale motivo sono stati riportati in grigio in figura 1.56.b.

Si ottiene il valore del taglio $T_S = -\frac{F}{L_2} d$, da cui si deduce che il taglio non dipende da a, cioè è costante tra S e C. Esso è negativo in quanto sulla faccia destra del taglio in S è una forza discorde a y. Pertanto, assumendo l'asse della trave come fondamentale e avendo assunto per convenzione di riportare il diagramma del taglio discorde ad y se

positivo, cioè verso l'alto in questo caso, si ricava il diagramma nel tratto SC riportato in figura 1.56.c.

L
B
A F
C
1 L2
d d F
L2
L 2 - d F
L2
F L 2 - d
L2
L1
L 2 - d F
L2
S
S C
d F
L2
Ts
Equilibrio alla
traslazione verticale
T S = -
F d
L2
a
F
C
T(z)
z
(a)
(b)
(c)
Diagramma del taglio tra il punto di
applicazione di F e C

$-\frac{F d}{L_2}$

Figura 1.56: Calcolo del taglio nel tratto tra la forza F ed il punto C.

Per il calcolo del momento tra B e la forza F si considera una sezione generica S_0 in tale tratto ad una distanza a_0 da B e si impone l'equilibrio del tratto BS_0 (figura 1.57.ab).

Non essendoci forze attive su BS_0, bisogna solo considerare la reazione interna in B, nota, e le tre caratteristiche della sollecitazione in S_0. Si ricava dunque: $M_{S_0} = \frac{L_d - d}{L_2} F a_0$, che come momento flettente è positivo perché è una coppia antioraria agente sulla faccia sinistra del taglio in S_0. Si usa anche dire, con una dizione non estremamente precisa ma indubbiamente efficace, che guardando le forze alla sinistra di S_0 'la forza che produce il momento' è la reazione di B su BC.

Allo stesso risultato si perviene se si impone l'equilibrio del tratto S_0C (figura 1.57.c) dove le forze agenti, oltre alle caratteristiche della sollecitazione in S_0, ora però applicate sulla faccia destra del taglio, vi sono la reazione in C e la forza F. Ma per l'equilibrio del tratto BC, la forza F, la reazione di B su BC e la reazione in C costituiscono un sistema equivalente a zero. Pertanto il sistema costituito dalla forza F e dalla reazione in C è equivalente all'opposto della reazione di B su BC. Si può dire dunque che, guardando le forze alla destra di S_0, 'la forza che produce il momento' è l'opposto della reazione di B su BC. La coppia che agisce sulla faccia destra del taglio in S_0 per equilibrare il momento dell'opposto della reazione di B su BC deve pertanto essere uguale ed opposta di quella che agisce sulla faccia sinistra del taglio in S_0 per equilibrare

la reazione di B su BC. Ma tali coppie, uguali ed opposte, come momento flettente coincindono in segno e in questo caso corrispondono ad un momento positivo.

Si è anche trovato che il momento in è lineare rispetto ad a_0 e dunque si annulla in B ed evidentemente assume il valore massimo dove è applicata F, dove il momento deve essere continuo per cui i limiti sinistro e destro devono coincidere. Si ottiene anche la cuspide che ci si doveva aspettare in corrispondenza della forza F (figura 1.57.d).

La linearità del diagramma del momento tra B e la forza F, e tra F e C, si ricava anche dal fatto che in tali tratti il carico distribuito q è nullo. Per lo stesso motivo, essendo q nullo anche fra A e B, il diagramma del momento continua linearmente anche in tale tratto. Inoltre, non essendoci forze o coppie concentrate in corrispondenza della cerniera in B, né in alcun altro punto di AB, il diagramma in AB si ottiene prolungando a tale tratto la funzione lineare ottenuta sul tratto tra B ed F. Si ottiene in definitiva il diagramma riportato in figura 1.57.e.

Per il calcolo del taglio tra B e la forza F si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per il momento, imponendo però l'equilibrio alla traslazione verticale del tratto BS_0 o equivalentemente del tratto S_0C, al posto di quello alla rotazione intorno a S_0 (figura 1.58.a-c). Si ottiene così che il taglio in S_0 è costante tra B e la forza F e tra questa e C, mentre in corrispondenza di F si ritrova il salto verso il basso pari in modulo proprio a F, così come ci si aspettava (figura 1.58.d).

L'andamento costante del diagramma del taglio tra B e la forza F, e tra F e C, si ricava anche dal fatto che in tali tratti il carico distribuito q è nullo. Per lo stesso motivo, essendo q nullo anche fra A e B, il diagramma del taglio continua costante anche in tale tratto. Inoltre, non essendoci forze concentrate in corrispondenza della cerniera in B, né in alcun altro punto di AB, il diagramma in AB si ottiene prolungando a tale tratto la funzione costante ottenuta sul tratto tra B ed F. Si ottiene in definitiva il diagramma riportato in figura 1.58.e.

Problemi 2-4

Il calcolo delle reazioni ed il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche per i problemi 2-4, riportati di seguito si lascia come esercizio (ovviamente non si sono riportati i diagrammi delle caratteristiche quando sono identicamente nulli).

Problema 5

Facendo tendere a zero la distanza d della forza dalla cerniera in B nei problemi 1 e 2 si osserva che sia le reazioni vincolari che i diagrammi delle caratteristiche tendono alla stessa soluzione. Ciò vuol dire che è possibile applicare una forza concentrata giusto sulla cerniera senza dover specificare se la forza va messa ‘immediatamente’ a destra o a sinistra. D'altra parte le forze e coppie non sono enti fisicamente misurabili, ma vanno piuttosto visti come enti matematici che possono compiere lavoro per

spostamenti
e rotazioni dei loro punti di applicazione. Pertanto una forza applicata in una sezione
delle trave è un ente che compie lavoro per l'eventuale spostamento della sezione stessa.
Nella cerniera lo spostamento è continuo, nel senso che i limiti destro e sinistro coincidono
con quello che può univocamente definirsi lo spostamento della cerniera, pertanto
ha senso applicare la forza direttamente sulla cerniera.

L
B
A F
C
$_1$ L$_2$
d d F
L$_2$
L $_2$ - d F
L$_2$
F L $_2$ L -$_2$ d L$_1$
L $_2$ - d F
L$_2$
S'
M$_{S'}$
Equilibrio alla
rotazione intorno a S'
M $_{S'}$= L $_2$ - d F a'
L$_2$
a'
F
C
Diagramma del
momento tra B e C
(a)
(b)
(c)
M(z)
z
L $_2$ - d F
L$_2$
B S'
B
F
Diagramma del momento
(d)
M(z)
z
S' C
d F
L$_2$
F
M$_{S'}$
B C
A
(e) A
F d
L$_2$
(L $_2$ - d)
F d
L$_2$

(L 2 - d)
F L 2 L -2 d L1
Figura 1.57: Calcolo del momento nel tratto tra A e la forza F e tracciamento del
diagramma del momento completo.
La soluzione che si ottiene negli esercizi 1 e 2 al limite per d ! 0 si può anche ricercare direttamente considerando il problema 5 di figura 1.62.
La differenza rispetto ai problemi già risolti finora consiste nel fatto che, essendo la
cerniera caricata con una forza verticale, le due reazioni che essa esplica sui tratti AB
e BC non sono più uguali ed opposte. Pertanto, quando si considera l'equilibrio del
tratto BC, nell'effettuare il taglio in B bisogna specificare se tale taglio lo si effettua
alla sinistra o alla destra della cerniera, che è anche il punto di applicazione della forza
F. Ciò è evidente anche considerando che, in generale, nel punto di applicazione di

L
B
A F
C
1 L2
d d F
L2
L 2 - d F
L2
F L 2 - d
L2
L1
L 2 - d F
L2
S'
TS'
Equilibrio alla
rotazione intorno a S'
L 2 - d F
L2
a'
F
C
Diagramma del taglio
tra B e C
(a)
(b)
(d)
T(z)
z
L 2 - d F
L2
B S'
B
(e)
S' C

F
d
L_2
F
(c)
$T_{S'}$
$T_{S'} =$
F
C
Diagramma del taglio
T(z)
B
- F d
L_2
L_2 - d F
L_2
L_2 - d F
L_2
- F d
L_2
Figura 1.58: Calcolo del taglio nel tratto tra A e la forza F e tracciamento del diagramma
del taglio completo.
una forza il taglio non è definito in modo univoco in quanto presenta una discontinuità,
mentre sono definiti i suoi limiti sinistro e destro. Pertanto, quando si effettua un
taglio e si sostituisce nella sezione in cui si è effettuato il taglio le caratteristiche della
sollecitazione agenti sulle due facce del taglio, è necessario specificare quale dei due
limiti della funzione taglio si considera, cioè in parole semplici ma efficaci, se si taglia
'a sinistra' o 'a destra' della forza, che in questo caso è applicata proprio sulla cerniera.

L_1
B
A
C
L_2
d
B
A
C
M(z)
F
F
F
F (L_1 - d)
- F (L_1 - d)
T(z)
F
Figura 1.59: Problema 2: reazioni e diagrammi del momento e del taglio.
Per il problema 5 si è allora proceduto tagliando dapprima 'immediatamente a destra'
di B nella sezione che si indicherà con B_d, imponendo l'equilibrio del tratto B_dC

e ricavando
reazioni in B_d ed in C tutte nulle. Si sottolinea che il termine ‘immediatamente’ sta ad indicare sinteticamente il seguente procedimento al limite:

- Si seziona in una sezione $B_{d,z}$ ad una distanza z da B, sostituendo sulle due facce sinistra e destra del taglio le tre caratteristiche incognite della sollecitazione.
- Si fa tendere z a zero e si tiene conto del fatto che le caratteristiche della sollecitazione tendono, per definizione di vincolo interno, alle interazioni trasmesse dalla cerniera in B. Tali interazioni sono costituite solamente da due forze aventi una qualsiasi retta d’azione passante per B. Se ne deduce che al tendere a zero di z il momento deve anch’esso tendere a zero. Pertanto, al limite, le interazioni in B_d sono pari alle reazioni della cerniera in B su BC ovvero, in generale, una forza verticale ed una orizzontale.

Note le interazioni in B_d si è imposto l’equilibrio dell’intorno elementare della cerniera in B, tagliando ‘immediatamente a sinistra’ in B_s ed ‘immediatamente a destra’ di B in B_d ed imponendo l’equilibrio del tratto B_sB_d. Si è ricavato che sulla faccia destra di B_s agisce una reazione F verso l’alto per equilibrare la forza esterna F verso il basso. Sulla faccia sinistra di B_s agisce allora una forza verticale F verso il basso e quindi, imponendo l’equilibrio del tratto AB_s si sono ricavate le ultime reazioni vincolari incognite in A. L’intero procedimento è riportato nella figura 1.62.
Note le reazioni vincolari esterne ed interne i diagrammi delle sollecitazioni sono facilmente ricavabili e sono riportati in figura 1.63.

Figura 1.60: Problema 3: reazioni e diagrammi del momento e del taglio.

Figura 1.61: Problema 4: reazioni e diagramma del momento.

Problemi 6-7

Al tendere a zero della distanza d nei problemi 3 e 4 si ottengono due soluzioni diverse,
riportate nelle due figure 1.65 e 1.66. Ciò significa che quando si vuole applicare la

B
A
C
F
L_1 L_2
B
A
C
F
FL_1
R B d
v R C
R B d
o
F
R B s = F
v
F
R B d = 0
o
R B d = 0
v
R C = 0

R A
o
R A
v M A
R A = F
v
R A = 0
o
M A =F L1
F
F
Azione della cerniera in B sul
tratto AB
Figura 1.62: Problema 5: determinazione delle reazioni vincolari.
coppia in prossimità di una cerniera è necessario specificare se tale coppia va applicata
a sinistra o a destra, mentre non ha senso applicare la coppia ‘proprio sulla cerniera’.
Ciò è perfettamente in accordo con il fatto che la coppia è un ente che compie lavoro per
la rotazione della sezione in cui essa è applicata, e che la rotazione non è una funzione
continua sulla cerniera mentre esistono i suoi due limiti sinistro e destro, ovvero le
rotazioni a sinistra ed a destra della cerniera.
Si sottolinea che per ricavare le soluzioni dei problemi 6 ed 7 conviene, almeno nella
fase di iniziale apprendimento delle tecniche risolutive dei problemi di statica, risolvere
i problemi 3 e 4 effettuando immediatamente, nella fase di calcolo delle reazioni
vincolari, il limite per d tendente a 0.
Problemi 8-14
Si è visto che su una cerniera ha senso applicare una forza senza specificare se essa
agisce a sinistra o a destra, mentre non ha senso applicare una coppia senza specificare
se essa agisce a sinistra o a destra. Analogamente su un doppio pendolo (su un pattino)
interno ha senso applicare una coppia senza specificare se essa agisce a sinistra o a destra,
mentre non ha senso applicare una forza trasvesale senza specificare se essa agisce

L1 B
A
C
L2
B
A
C
M(z)
F
F
T(z)

F
FL_1
$-FL_1$
F
F

Figura 1.63: Problema 5: diagrammi del momento e del taglio.

a sinistra o a destra. Ciò perché sul doppio pendolo la rotazione, per cui compie lavoro la coppia, è continua mentre lo spostamento ortogonale agli assi del doppio pendolo (parallelo ai piatti del pattino), per cui compie lavoro la forza trasversale è discontinuo.

Tutti i ragionamenti svolti per i problemi 1-7 si possono svolgere in maniera perfettamente analoga per i problemi 8-14 la cui soluzione è riportata nelle figure 1.66-1.72 e si lascia come esercizio.

Problema 15

I diagrammi del momento e del taglio su una trave appoggiata-appoggiata soggetta ad un carico uniformemente distribuito sono riportati in figura 1.73. Si consiglia come esercizio di ricavare la soluzione sia risolvendo per via analitica le (1.24) aggiungendo le condizioni al contorno $M(0) = M(L) = 0$, sia partendo dal calcolo delle reazioni vincolari, già riportate in precedenza nell'esempio di figura 1.28 e procedendo mediante il principio di sezionamento.

Problema 16

Per determinare le reazioni vincolari ed i diagrammi delle caratteristiche per il problema di figura 1.74 conviene preliminarmente sostituire al carico uniformemente distribuito la sua risultante disposta sul suo asse centrale, ovvero nella mezzeria del carico. Per tale schema 'ausiliario' si determinano dunque le reazioni ed i diagrammi del momento

Figura 1.64: Problema 6: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

Figura 1.65: Problema 7: reazioni vincolari e diagramma del momento.
e del taglio, che sono riportati in figura 1.75. I diagrammi così ottenuti sono quelli del
problema reale in tutti i punti esterni al tratto in cui è presente il carico distribuito.
Per verificare quest’ultima affermazione basta considerare innanzitutto che ai fini
del calcolo delle reazioni vincolari il carico interviene nelle equazioni cardinali della
statica attraverso la sua risultante ed il suo momento risultante, per cui al carico si può

L
A B F
C
$_1$ L_2
d
A B F
C
F (L_2 - d) F
F (L_2 - d)
M(z)
z
T(z)
- F

Figura 1.66: Problema 8: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

sostituire un qualsiasi sistema staticamente equivalente tra cui quello costituito dalla sua risultante applicata in mezzeria. Quindi si osserva che per calcolare le caratteristiche della sollecitazione in un punto qualsiasi esterno alla zona di applicazione del carico, per esempio nella sezione S in figura 1.75, si può imporre equivalentemente l'equilibrio dei tratti AS o SB. Nel primo caso il carico non interviene affatto, mentre nel secondo caso sul tratto SB agisce tutto il carico che quindi, nella scrittura delle equazioni di equilibrio del tratto, può essere sostituito con la sua risultante in mezzeria. Tutto ciò vale anche per i due punti C e D estremi dell'intervallo di applicazione del carico, dove i valori del momento e del taglio calcolati in figura 1.75 sono dunque esatti. In particolare, se sono esatti i valori del taglio sono evidentemente esatte anche le tangenti al diagramma del momento.

Nei punti interni a CD invece i diagrammi di figura 1.75 sono evidentemente 'falsi' e per questo motivo sono stati disegnati in grigio. Considerando infatti la sezione S_0 all'interno di CD ed imponendo l'equilibrio del tratto AS_0, nel problema reale bisogna considerare, per l'equazione di equilibrio, solamente la parte di carico agente su CS_0, ed è dunque sbagliato sostituire questa parte di carico con la risultante di tutto il carico.

Poiché i valori dei momenti in C e D e sono esatti, così come le tangenti al diagramma in tali punti, e poiché la funzione momento è parabolica in presenza di un carico uniformemente distribuito, il diagramma del momento reale si ottiene semplicemente interpolando la parabola tra i valori e le tangenti in C e D. Analogamente, sapendo che il diagramma del taglio è lineare tra C e D, per ricavare il diagamma del taglio a partire

L
A F B
C
L_1 L_2
d
A F B
F (L_1 - d) C

M(z)
z
T(z)
F
$- F (L_1 - d)$
F
Figura 1.67: Problema 9: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

Figura 1.68: Problema 10: reazioni vincolari e diagramma del momento.

Figura 1.69: Problema 11: reazioni vincolari e diagramma del momento.
L
A B F
C
$_1$ L_2
A B F
C
F L_2 F
M(z)
z
T(z)
- F
F L_2
F L_2
Figura 1.70: Problema 12: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

L

A F B
C
1 L_2
A F B
F L_1 C
M(z)
z
T(z)
F
- F L_1
F
Figura 1.71: Problema 13: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

Figura 1.72: Problema 14: reazioni vincolari e diagramma del momento.

L
qL
8
2
qL
2
qL
2
q
M(z)
T(z)
z
z
qL
2
qL
2
Figura 1.73: Trave appoggiata con carico uniformemente distribuito.
q
L L L
Figura 1.74: Problema 16
da quello ‘falso’ di figura 1.75 bisogna semplicemente interpolare i valori ottenuti in C
e D con una funzione lineare. I diagrammi così ottenuti sono riportati in figura 1.76.

Il procedimento utilizzato è di carattere generale. Pertanto in presenza di carichi uniformemente distribuiti, una volta ricavate le reazioni vincolari, conviene preliminarmente sostituire, per ogni tratto in cui agisce il carico e non agiscono forze o coppie (attive o reattive che siano) il carico distribuito con la sua risultante sulla mezzeria del tratto, cioè sul suo asse centrale. I diagrammi che si ottengono sono ‘falsi’ ma i valori dei momenti, delle tangenti al diagramma del momento e del taglio sono esatti in tutti i punti esterni ad ognuno di tali tratti. Per ottenere i diagrammi ‘veri’ bisogna dunque interpolare opportunamente delle parabole e delle funzioni lineari in tali tratti al posto dei diagrammi ‘falsi’ rispettivamente del momento e del taglio.

qL
2
qL
2
34
qL2
L L L
qL
qL
2
qL
2
M(z)
T(z)
A S C S' D B

Figura 1.75: Problema 16: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio sullo schema ausiliario in cui si è sostituito il carico distribuito con la sua risultante in mezzeria.

qL
2
qL
2
58
qL2
L L L qL
2
qL
2
M(z)
T(z)
q

Figura 1.76: Problema 16: diagrammi delle caratteristiche.

Problema 17

In figura 1.77 si è riportato il procedimento per il calcolo delle reazioni vincolari per la trave a due campate del problema 17.

Per il tracciamento del diagramma del momento si può osservare che, essendo il carico q continuo su tutta la trave il momento ha un'unica espressione quadratica ed è quindi rappresentato da un'unica parabola, che peraltro è univocamente definita una volta noti tre parametri, ad esempio due ordinate ed una tangente.

Partendo dal punto C, dove il momento è nullo, si assegna a piacere la tangente t_C nel punto[10] P_C (coincidente con C essendo appunto nullo il momento), scegliendo in tal modo una scala dei momenti. Dovendo essere il momento nullo anche in B, i punti noti P_B e P_C e la tangente t_C sono già sufficienti a definire la funzione momento. Infatti, la tangente t_B in P_B, per la nota proprietà delle parabole, deve incontrare la tangente t_C lungo la verticale passante per il punto medio M_{BC} tra B e C. Essa pertanto è determinata.

Note le tangenti t_B e t_C nei punti P_B e P_C, si può ricavare la tangente in P_A con il seguente ragionamento.

• La tangente incognita t_A in P_A deve intersecarsi con t_C lungo la verticale passante per il punto medio M_{AC} tra A e C, che coincide con B. Si ricava dunque il punto $t_A \backslash t_C$.

• La tangente incognita t_A in P_A deve anche intersecarsi con t_B lungo la verticale passante per il punto medio M_{AB} tra A e B. Si ricava dunque il punto $t_A \backslash t_B$.

• La tangente t_A si ricava come congiungente i punti trovati $t_A \backslash t_C$ e $t_A \backslash t_B$.

• P_A, e quindi il valore del momento in A, ovviamente si trova come intersezione della verticale per A con t_A.

Il diagramma del taglio si può tracciare a partire dalla reazioni vincolari in A e in C, che forniscono i tagli in tali sezioni di estremità, ed interpolando tali valori con un'unica funzione lineare dato che il carico è uniformemente distribuito su tutta la trave. Si ritrova come verifica che il taglio si annulla in corrispondenza del punto medio tra B e C, dove il momento assume il valore massimo pari a $q L^2/8$.

Problema 18

Il problema 18 riportato in figura 1.79 non presenta particolari difficoltà dal punto di vista concettuale, ma rispetto ai problemi considerati precedentemente vi sono più azioni contemporaneamente, nel caso in esame il carico distribuito q tra B e D, la coppia M in B e la forza verticale verso l'alto in C. Per tracciare i diagrammi del momento e del taglio è necessario almeno conoscere i rapporti fra le diverse azioni applicate opportunamente

adimensionalizzate. In questo caso sono assegnati i valori numerici delle azioni e della lunghezza L, riportati in figura.
Per il calcolo delle reazioni vincolari si può procedere sia scrivendo le equazioni di
equilibrio direttamente sostituendo i valori numerici, oppure operando in forma simbolica
e sostituendo i valori numerici nelle espressioni ottenute per le reazioni. In questo

[10] Dato un punto Q sulla fondamentale rispetto a cui si traccia il diagramma del momento si indicherà
con P_Q il corrispondente punto del diagramma.

B
A
C
q
L
qL
2
L
qL
2
qL
2
B
A
C
q
B
A
C
q
q
q
qL 32
qL^2

Figura 1.77: Problema 17: determinazione delle reazioni vincolari.

caso si è operato in questo secondo modo, riportando le espressioni delle reazioni in forma
simbolica nella figura 1.79.b e calcolandone poi i valori numerici riportati in figura
1.79.c. Per il calcolo delle reazioni vincolari si può operare come segue.

- Partire dall'equilibrio del tratto C_d D, sezionando a destra di C.
- Nota la rezione della cerniera in C su CD, dall'equilibrio dell'intorno elementare
della cerniera si ricava la reazione della cerniera sul tratto AC.
- Si impone quindi l'equilibrio del tratto AC_s, sezionando a sinistra di C.

Per il tracciamento del diagramma del momento si può invece precedere come segue.

- Si parte dal punto A, dove la coppia reattiva pari a 4KN m antioraria corrisponde
ad un momento flettente negativo, che tende le fibre superiori.
- Il taglio risulta invece nullo in tutto il tratto AB in quanto a sinistra di qualsiasi
sezione di questo tratto non vi sono forze verticali applicate, ma solo la coppia

reattiva in A. Pertanto il momento è costante tra A e B e pari appunto a

A B
C
q
L
qL
L 2
qL
2 qL 32
qL^2
t_C
A
B=M M_{BC} C
M_{AB}
t_B t_A t_C
t_A t_B
t_A
AC
P_A
P_B P_C
qL^2
qL
8
2
qL 32
qL
2
Figura 1.78: Problema 17: costruzione grafica del diagramma del momento e tracciamento del diagramma del taglio.

−4KN m. In B il momento deve avere una discontinuità essendoci applicata la coppia M = 4KN m antioraria. Il salto è pari a M = −M = −4KN m
e si ottiene quindi 'immediatamente a destra' di B un momento flettente pari a −8KN m. Tale valore può anche essere trovato direttamente con il principio di sezionamento sezionando a destra di B, in B_d, ed imponendo l'equilibrio del tratto AB_d, oppure del tratto B_dC, o ancora di B_dD.

• Il diagramma del momento tra B e C è parabolico. Il momento è stato ormai calcolato in B, ed è pari a −8KN m, ed è nullo in C per la presenza della cerniera.
Peraltro la reazione verticale della cerniera sul tratto BC è risultata nulla, per cui il taglio alla sinistra di C è nullo. Pertanto la tangente del diagramma del momento alla sinistra di C è orizzontale.

• Noti i valori del momento in B pari −8KN m ed in C, pari a 0, e nota la tangente
in C, orizzontale, la tangente in B si ricava dal fatto che essa deve incontrare quella in C sulla verticale per il punto medio tra B e C.

• Un procedimento generale, cioè sempre utilizzabile, per tracciare la tangente del

q
F
M

L L L
q
F
M
qL
2
qL
2
qL
2
- F
qL - F 32
qL - FL - M
1
4
4
4
2
0 2
2
q = 1 KN/m
F = 2 KN
= 4 KN m
L = 4 m
M
2
- 4
- 8
2
b' = 4
4 2
- 2
M(z)
T(z)
z
z
A
B C D
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
b = 8
a = 2
α
a' = 2
β
a" = 4
b" = 4
γ
A
A
B
B
C
C
D
D

Figura 1.79: Problema 18: reazioni vincolari e diagrammi del momento e del taglio.

diagramma del momento a destra di B si basa sui valore del taglio e del momento alla destra di B, ovvero $M_{Bd} = -8KN\ m$ e $T_{Bd} = 4KN$ (quest'ultimo si calcola immediatamente dall'equilibrio alla traslazione verticale del tratto AB_d). Infatti T_{Bd} è pari alla derivata del momento alla destra di B, cioè pari alla tangente dell'angolo formato dalla retta tangente alla destra di B con l'orizzontale, assunto positivo se orario in conseguenza del fatto di disegnare il diagramma del momento verso il basso se positivo. La retta tangente al diagramma del momento a destra di B può allora facilmente ricavarsi staccando in direzione orizzontale un qualsiasi segmento di lunghezza a (in figura 1.79.d si è preso a = 2m), e ricavando il corrispondente segmento verticale b = a tang = a T_{Bd} = 2m · 4KN = 8KN m.

• Il diagramma del momento nel tratto CD si può tracciare partendo dai valori del taglio e del momento alla destra di C, pari a T_{Cd} = 2KN e M_{Cd} = 0. Il taglio è pari alla tangente dell'angolo formato dalla retta tangente alla destra di C con l'orizzontale (figura 1.79.d). Tale tangente, analogamente a prima, può essere

disegnata staccando come segmento orizzontale il tratto di fodamentale tra C ed il punto medio tra C eD, di lunghezza pari a a_0 = 2m, e ricavando il corrispondente segmento verticale b_0 = a_0 tang = 4KN m.

• Tracciata la tangente alla destra di C, quella in D si ricava immediatamente in quanto deve incontrare la tangente alla destra di C sulla verticale passante per il punto medio tra C e D.

• Note le due tangenti alla destra di C ed in D si può quindi interpolare la parabola.

Per quanto riguarda il diagramma del taglio, si è già visto che esso è nullo nel tratto AB. In B ha un salto verso l'alto pari a 4KN, pari alla reazione in B che è diretta verso l'alto. Nel tratto BD deve avere pendenza costante in quanto T_0 = −q = −1KN/m.

Tale valore rappresenta la tangente dell'angolo formato dal diagramma con l'orizzontale.

Riportando il diagramma del taglio verso l'alto se positivo, è positivo se antiorario, per cui in questo caso, essendo tang = −1, risulta orario. La tangente è stata disegnata staccando il segmento orizzontale a_{00} = 4m e ricavando quello corrispondente verticale pari a b_{00} = a_{00}|tang | = 4KN (figura 1.79.e).

Il diagramma del taglio ha poi un salto in corrispondenza del punto C verso l'alto pari a 2KN, che è pari alla forza concentrata verso l'alto applicata. Contunua poi con la stessa pendenza nel tratto CD ed ha il suo punto di nullo nella mezzeria di tale tratto in corrispondenza del massimo del diagramma del momento flettente.

1.5 Travature non ad asse rettilineo - Metodi grafici

Per travatura non ad asse rettilineo si intende in questo contesto un assemblaggio di travi rettilinee i cui assi non sono tutti disposti su una stessa retta. Per tali tipi di problema

si studieranno, in luogo dei metodi analitici sviluppati finora, solamente metodi grafici. Inoltre, per semplificare la trattazione ci si limiterà al tracciamento del solo diagramma
del momento, sebbene alcune considerazioni si svolgeranno per tutte e tre le caratteristiche della sollecitazione.
I metodi grafici che si illustreranno si basano su poche ma fondamentali condizioni di
equilibrio grafico, note dalla Meccanica Razionale, che si espongono preliminarmente.

1.5.1 Condizioni di equilibrio grafico

Dato un sistema F di forze costituito da n vettori forza F_i, i = 1, . . . , n, si ottiene il
cosiddetto poligono di tali forze disponendo n vettori F_{0i} equipollenti ciascuno alla forza
F_i, in modo tale che l'estremo iniziale della forza F_0
$_{i+1}$ sia coincidente con quello finale
della forza F_0
$_i$. E' facile vedere che il vettore che ha il suo estremo iniziale coincidente con l'estremo iniziale di F_0
$_1$ ed il suo estremo finale coincidente con l'estremo finale di
F_0
$_n$ è equipollente alla risultante di F (figura 1.80).
Condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema di due forze, o di tre forze, sia
equivalente a zero sono le seguenti:
Teorema 6 Un sistema di due forze è equivalente a zero se e solo se esse sono uguali
in modulo, opposte in verso e applicate sulla stessa retta d'azione, cioè se e solo se esse
costituiscono una coppia di braccio nullo.

F' 1
F4' F3' F2'
F' 5
F' 6
Vettore equipollente
alla risultante di
F1 ,....,Fn
F1
F2
F3
F6 F5
F4
Figura 1.80: Poligono delle forze.
F
-F
Figura 1.81: Sistma di due forze equivalente a zero.
Teorema 7 Un sistema di tre forze è equivalente a zero se e solo se il loro poligono
è chiuso e le loro rette d'azione convergono in un unico punto del piano, proprio o
improprio.
F' 1
F' 2

F'_3
F_2
F_3
F_1

Figura 1.82: Sistma di tre forze equivalente a zero.

Vale inoltre la seguente importante condizione di equivalenza statica tra un sistema costituito da una forza ed una coppia ed uno formato da una sola forza.

Teorema 8 Si consideri un sistema F_1 costituito da una forza F, applicata in un punto qualsiasi di una retta r_1 del piano orientata concordemente al verso di F, ed una coppia

M, assunta positiva se antioraria. Percorrendo r_1 nel suo verso positivo si assumano positive le distanze da r_1 dei punti alla sinistra di r_1 e negative quelle alla destra di r_1.

Il sistema F_1 è allora equivalente al sistema F_2 costituito dalla stessa forza F applicata però su una retta r_2 parallela ad r_1 posta alla distanza d da r_1 pari a $d = -M/|F|$.

Figura 1.83: Equivalenza tra un sistema di una forza ed una coppia ed uno formato da una sola forza.

Con riferimento alla figura 1.83, per verificare che i due sistemi F_1 ed F_2 sono tra loro equivalenti, essendo evidente che essi hanno la stessa risultante F bisogna solo verificare che essi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un polo scelto arbitrariamente.

Avendo infatti la stessa risultante, se è uguale il loro momento risultante calcolato rispetto ad un polo sarà anche uguale quello calcolato rispetto ad un altro polo qualsiasi. Nel caso della figura 1.83 il momento risultante M_{1,P_1} di F_1 rispetto al polo P_1 è M ed è antiorario, cioè positivo secondo la convenzione assunta, mentre quello di F_2 è dato da $M_{2,P_1} = |F|\,|d|$, anch'esso positivo. Essendo $|d| = |M|/|F|$ si ha $M_{1,P_1} = M_{2,P_1}$. Assumendo P_2 come polo, il momento risultante rispetto di F_2 è nullo,

e quello di F_1 è dato da $M_{1,P_2} = M - |F|\,|d| = M + |F|\,d$, essendo $d < 0$ in questo caso. Poiché $d = -M/|F|$ si ricava che$M_{1,P_2} = 0 = M_{2,P_2}$.
L'ultima verifica sottolinea il fatto che r_2 rappresenta l'asse centrale del sistema F_1,
ovvero il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante di F_1 è nullo.

1.5.2 Applicazioni del metodo grafico ai telai piani isostatici

Problema 1: arco a tre cerniere

Si consideri l''arco a tre cerniere' di figura 1.84. Per la determinazione delle reazioni
vincolari bisogna, così come fatto per le travi ad asse rettilineo, utilizzare il principio
di sezionamento imponendo che sia soddisfatto l'equilibrio di ogni tratto della struttura.
Scrivendo ad esempio le equazioni cardinali della statica per i due tratti AB e BC, soggetti
alle eventuali azioni esterne ed alle reazioni vincolari esterne ed interne, essendo

la struttura isostatica si ritrova l'unica soluzione del problema dell'equilibrio e dunque
le reazioni vincolari.

F
A
B
C

Figura 1.84: Problema 1: arco a tre cerniere.

In molti casi significativi, come quello in esame, si possono determinare le reazioni
vincolari in una struttura isostatica e le caratteristiche della sollecitazione utilizzando le
procedure della cosiddetta 'statica grafica'. Con i metodi che si illustreranno di seguito
si ricercano, con ragionamenti di tipo grafico, le reazioni vincolari analizzando un tratto
alla volta. Non è però arbitraria la scelta del tratto da cui iniziare. Si è visto anche
per il calcolo analitico delle reazioni vincolari per esempio nel caso di figura 1.32, che
le 3 equazioni cardinali della statica per il tratto AC coinvolgono 5 incognite e sono
dunque accoppiate alle 3 equazioni da scrivere per il tratto CD, che invece coinvolgono
solamente 3 incognite. Pertanto, anche procedendo attraverso la soluzione analitica
delle equazioni della statica, conviene spesso partire da un tratto e procedere successivamente
all'analisi dell'equilibrio degli altri tratti. I metodi della statica grafica che si
illustreranno di seguito si basano sulla possibilità di poter analizzare l'equilibrio della
struttura tratto per tratto.
Ad esempio, nel caso in esame di figura 1.84 non si può partire dal tratto BC.

Infatti la reazione di B su BC deve avere la sua retta d'azione passante per B. Analogamente la reazione in C deve avere la sua retta d'azione passante per C. Il tratto BC è soggetto a tali due reazioni ed alla forza F, cioè a tre forze. Affinché sussista l'equilibrio le tre rispettive rette d'azione devono convergere in un unico punto. Ma si vede dalla figura 1.85 che esistono infinite possibilità per soddisfare tale condizione di equilibrio grafico.

Partendo invece dal tratto AB, si vede che, poiché esso è solamente soggetto alle reazioni in A ed in B, affinché sussista l'equilibrio del tratto tali reazioni devono avere la stessa retta d'azione. Dovendo poi esse avere rette d'azione passanti rispettivamente per A e per B, la congiungente tali punti fornisce proprio la retta d'azione cercata (figura 1.86.

Poiché la cerniera in B non è caricata le due sue reazioni su AB e su BC sono uguali ed opposte ed hanno dunque la stessa retta d'azione, coincidente con la congiungente A e B. Ritornando allora all'analisi dell'equilibrio del tratto BC, denotando con I e II i tratti AB e BC, è nota la retta d'azione r_B della reazione R^{II}_B di B sul tratto II.

Per la condizione di equilibrio di tre forze si ricava anche la retta d'azione r_C di R_C, come mostrato in figura. I moduli ed i versi delle forze si ricavano poi imponendo che il poligono delle forze si chiuda.

F
A
B
C
F
B
C

Figura 1.85: Per la soluzione grafica non si può partire dal tratto BC.

Nota R^{II}_B, si ricava anche $R^I_B = -R^{II}_B$ e dunque $R_A = -R^I_B = R^{II}_B$. Le reazioni vincolari così ottenute sono riportate in figura 1.86.

Per il calcolo del diagramma del momento si può partire dal punto C. Si consideri allora una sezione S come in figura 1.87 e si imponga l'equilibrio alla rotazione del tratto CS intorno ad S. In tale condizione di equilibrio non intervengono lo sforzo normale ed il taglio, disegnati perciò in grigio. Si ricava che il modulo $|M_S|$ del momento in S vale $|M_S| = |R_C|\, d$, dove d è la distanza di S dalla retta d'azione di R_C. Se si conviene di adottare come fondamentale del diagramma del momento in ogni trave l'asse stesso della trave e di disegnare l'ordinata del momento flettente dalla parte delle fibre tese non è necessario assegnare un segno a M_S. Nel caso in esame la coppia agente in S sul tratto CS è antioraria e tende le fibre alla destra del tratto stesso. Il momento varia poi linearmente con d, che a sua volta varia linearmente sul tratto CD in esame poiché esso è rettilineo, per cui si ricava per il tratto CD il diagramma lineare mostrato in figura 1.87. La pendenza può essere assegnata arbitrariamente e determina la scala del diagramma del momento.

Si consideri ora l'equilibrio del nodo D sezionando nelle sezioni D_1 e D_2 immediatamente a sinistra e sotto D. Non essendoci in D una coppia applicata, la coppia oraria corrispondente al momento in D_2 deve essere bilanciata da una coppia uguale in modulo ma antioraria applicata in D_1, che tende le fibre superiori. Ciò si traduce nel ribaltamento dell'ordinata tracciata in D_2 come mostrato in figura. Considerando ora una sezione S_0 del tratto BD a destra del punto di applicazione della forza, l'equilibrio del tratto S_0C fornisce il modulo del momento flettente in S_0 pari a $|M_{S_0}| = |R_C|\, d_0$, dove d_0 è la distanza di S_0 dalla retta d'azione di R_C. Il momento varia dunque linearmente con d_0, che a sua volta varia linearmente sul tratto CD. Il punto di nullo del diagramma

F
A
B
C
$r_A = r_B$
A
B F
B
C
r_B r_C
r_F
F
r_B r_F r_C
R_C

R B
II
F
A
B
C
R B
II
R B
I
R A R C
I II
Figura 1.86: Determinazione delle reazioni vincolari per via grafica.
è quello in cui d_0 si annulla, cioè il punto di intersezione del tratto in esame con la retta
d’azione della reazione R_C. Il diagramma prosegue poi linearmente con la stessa pendenza
fino al punto di applicazione della forza F. Ciò lo si deduce anche considerando
una sezione S_{00} tra il punto di applicazione della forza e il punto di nullo del diagramma
ed imponendo l’equilibrio del tratto $S_{00}C$.
Dal punto C fino al punto di applicazione della forza per ogni sezione considerata si è
analizzato l’equilibrio del tratto tra la sezione stessa ed il punto C, e nell’equilibrio alla
rotazione intorno alla sezione sono intervenuti sempre e solo il momento nella sezione
e la reazione R_C. Pertanto il momento flettente in ciascuna sezione deve bilanciare il

F
A
B
C
R B
II
R B
I
R A R C
S
R C
S
Ms = d R C
d
F
A
B
C
R B
II
R B
I
R A R C
E D
E D
Figura 1.87: Diagramma del momento sul tratto CD.
R C
Ms ' = d' R C
d'
C
S'
F
A

B
C
R B
II
R B
I
R A R C
S'
F
A
B
C
R B
II
R B
I
R A R C
S''
R C
MS '' = d'' R C
d''
C
S''
E D
E D
D
D2
D1
Figura 1.88: Diagramma del momento tra la forza e C.

M = d''' S''' R C
d'''
S'''
B
F
A
B
C
R B
II
R B
I
R A R C
F
A
B
C
R A R C
S'v S'''
B
S'v
d'v
v M = d' S' v R C
E D
D
E
R B
II
R B
I
Figura 1.89: Diagramma del momento tra E e C.
F
A
B
C
R A R C
E D
Figura 1.90: Diagramma del momento completo.

momento di R_C rispetto alla sezione stessa. Passando alle sezioni S_{000} e S_{0v} conviene per semplicità considerare l'equilibrio rispettivamente dei tratti BS_{000} e $S_{0v}B$, come fatto in figura. Si riconosce che il momento in S_{000} deve bilanciare il momento di R^{II}_B rispetto a S_{000} stessa, mentre il momento in S_{0v} deve bilanciare il momento di R^{I}_B rispetto a S_{0v}.

Si ottiene il diagramma lineare di figura 1.89.

Per l'equilibrio del nodo E l'ordinata ottenuta in E per il tratto EB si ribalta sul tratto AE, su cui il diagramma prosegue linearmente annullandosi nella cerniera, che è anche il punto di intersezione del tratto con la retta d'azione di R_A. Il diagramma del momento completo è riportato in figura 1.90.

Problema 2

A
B
C
I
II
D E
q
L
G

Figura 1.91: Problema 2: geometria e carico.

Si consideri ora il telaio isostatico di figura 1.91 costituito dai due tratti I e II uniti dal pendolo DE. E' facile verificare che, imponendo l'equilibrio di uno solo dei tratti I o II, non è possibile determinare le rette d'azione delle reazioni vincolari. Bisogna invece, in questo caso, partire dall'equilibrio dell'intera struttura. Il carico distribuito evidentemente può sostituirsi con la sua risultante e le altre forze agenti sulla struttura sono il sistema di reazioni del pattino in A, ovvero una forza ed una coppia equivalenti ad un'unica forza R_A avente una retta d'azione ortogonale alla direzione di scorrimento del pattino, e la reazione R_C . Affinché tali forze siano in equilibrio la retta d'azione di R_A deve passare per il punto d'intersezione tra la risultante del carico esterno e la retta d'azione di R_C, come è mostrato in figura 1.92.

Determinata la forza R_A, equivalente al sistema di reazioni del pattino in A, non bisogna dimenticarsi che tale sistema di reazioni agisce evidentemente in A e non sulla retta d'azione di R_A [11]. Pertanto è utile riportare esplicitamente tale sistema, che si ottiene traslando R_A in A ed aggiungendo la coppia di trasporto.

Note le reazioni in A ed in C, è possibile determinare le reazioni in B e le reazioni
del pendolo in D ed E sui due tratti imponendo singolarmente l’equilibrio del tratto I e
del tratto II (figura 1.93).

[11]Tale considerazione sembrerebbe ovvia, ma in realtà non lo è in quanto non è affatto raro l’errore di
confondere la retta d’azione della risultante di un sistema di forze con il punto o i punti di applicazione
di ciascuna delle forze del sistema.

A
B
C
R_C
R_A
I
II
D E
Sistemi
equivalenti
q
qL
qL
G

Figura 1.92: Equilibrio esterno.

A
B
C
R_C
R_A
I
II
D E
Sistemi
equivalenti
R_B
I
R_B
II
R_D
I
R_E
II
R_A
R_B
I
R_D
I
G

Figura 1.93: Equilibrio dei tratti I e II.

A
B
C
R_C
R_A
I
II
d
d

D E
Sistemi
equivalenti
R B
I
R B
II
R D
I
R E
II
qL
qL
q
S
S' M G
Figura 1.94: Diagramma del momento sul tratto I.
A
B
C
R + C
I
II
d
D E
R B
II
R E
II
qL
retta ausiliaria
H
K
R C
R E
II
R B
II
qL +
G
Figura 1.95: Equilibrio del II tratto e determinazione della retta ausiliaria.
E’ possibile iniziare il tracciamento del diagramma del momento da vari punti. In
questo caso si è iniziato dal punto A. In A il momento non è nullo, e dal verso della
coppia reattiva del pattino si evince che sono tese le fibre alla sinistra di A. Pertanto
si stacca una prima ordinata dal lato delle fibre tese, il cui modulo determina implicita76

A
B
C
R C
R A
I
II
d
d
D E
Sistemi
equivalenti
R B
I

R B
II
R D
I
R E
II
qL
qL
S
S'
retta ausiliaria
punto di
nullo
M G
Figura 1.96: Diagramma falso sul tratto BG.
A
B
R C
C
R A
I
II
d
d
D E
R B
I
R B
II
R D
I
R E
II
G
R
C
Figura 1.97: Diagramma del momento completo.

mente la scala del diagramma del momento e quindi va scelto con la sola accortezza di ottenere una scala ragionevole.
Sul tratto AD il diagramma è lineare non essendoci un carico distribuito. Avendo già determinato la scala del momento non è possibile assegnare in modo arbitrario la pendenza del diagramma, che si determina invece considerando l'equilibrio di un qualsiasi tratto tra A ed una sezione S contenuta tra A e D. Si vede così facilmente 'la forza che produce il momento' è R_A e che quindi il punto di nullo del diagramma è l'intersezione della retta d'azione di R_A con la prosecuzione del tratto AD (figura 1.94). In corrispondenza del punto di applicazione di R^I_D il diagramma presenta una cuspide e, oltre tale punto, è di nuovo lineare e si annulla in B.
Per procedere con il tracciamento del diagramma del momento sul tratto BG, si osserva innanzitutto che si può operare, come visto in precedenza per il problema 16, considerando 'in prima battuta' al posto del carico la sua risultante applicata

nel punto M, ovvero in mezzeria. Il diagramma che si ottiene è falso, ed è indicato in grigio nelle figure 1.96 e 1.97, me evidentemente i suoi valori in B ed in G e le tangenti in tali punti saranno corretti.

Pertanto, il diagramma falso è lineare nel tratto BM. Poiché, come si è già osservato, la scala del diagramma è stata già implicitamente fissata con la prima scelta dell'ordinata in A, evidentemente anche nel proseguire il diagramma a partire da B, dove il momento è nullo, bisogna in qualche modo rispettare tale scala. A tal fine si utilizza una semplice costruzione grafica che si basa sulla considerazione che le reazioni R^{I}_{B} e R^{II}_{B} sono uguali in modulo ed hanno la stessa retta d'azione[12] , e che dunque in punti posti alla stessa distanza da tale retta d'azione si dovrà ottenere lo stesso valore assoluto del momento flettente, e quindi la stessa ordinata. Pertanto, disegnando due rette parallele aventi la stessa distanza d dalla retta d'azione delle reazioni in B, le loro intersezioni con i tratti DB e BG sono rispettivamente i punti S ed S_0 (figura 1.94). Nel punto S è stato già determinato il momento, per cui l'ordinata del momento in S va riportata in S_0. Da quale parte bisogna riportare tale ordinata lo si vede poi considerando il segno del diagramma del momento (falso) sul tratto BM. In particolare, in questo caso, la reazione R^{II}_{B} tende le fibre inferiori.

Nota l'ordinata in S_0, si determina il diagramma lineare falso nel tratto BM fino ad incontrare la risultante del carico in M, dove il diagramma falso presenta una cuspide.

Considerando ora una sezione generica tra M e G, si può imporre l'equilibrio della parte del tratto II da tale sezione fino a B, a sinistra, o della parte sempre del tratto II che va da tale sezione fino a C. Nel primo caso la 'forza che produce il momento è la risultante della reazione R^{II}_{B} e della risultante del carico. Nel secondo caso tale forza è data da dalla risultante di R^{II}_{E} e di R_C. Queste quattro forze, insieme, costituiscono il sistema di forze che agisce sul tratto II, e devono dunque costituire un sistema equivalente a zero. D'altra parte la risultante di R^{II}_{B} e della forza q L equivalente al carico è una forza che passa per il punto d'intersezione delle loro rette d'azione, che in figura 1.95 è indicato con K. Analogamente la risultante di R^{II}_E e di R_C è una forza che passa per il punto d'intersezione delle loro rette d'azione, che in figura 1.95 è indicato con H.

Tali due risultanti devono costituire un sistema equivalente a zero e dunque si devono

[12] Si sottolinea che, per soli motivi di chiarezza grafica le due reazioni in B si sono disegnate leggermente spostate rispetto alla loro retta d'azione, che invece passa per il baricentro della cerniera in B.

trovare sulla stessa retta d'azione, che passa dunque per H e K ed è comunemente detta 'retta ausiliaria' (figura 1.95).

Evidentemente l'intersezione della retta ausiliaria con il tratto MG o con la sua prosecuzione è proprio il punto di nullo del diagramma tra M e G (figura 1.96). Nel diagramma falso tra B e G va infine interpolato il diagramma vero, parabolico, tenendo conto che i valori in B e G del diagramma falso e le rispettive tangenti sono corrette (figura 1.97).

Il resto del tracciamento del diagramma del momento, riportato in figura 1.97, non presenta difficoltà concettuali nuove e viene lasciato come esercizio.

1.5.3 Segno delle caratteristiche della sollecitazione

Si è visto che la convenzione di riportare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese consente di tracciare il diagramma senza dover assegnare un segno al momento flettente in ogni sezione. In molti casi è però opportuno potere assegnare un segno al momento ed in generale alle caratteristiche della sollecitazione. A tale scopo si deve considerare per ogni trave rettilinea della travatura, ad esempio la trave i-esima, un sistema di riferimento locale $\{O, y_i, z_i\}$ avente l'asse z_i coincidente con l'asse della trave. Per ogni trave il segno delle caratteristiche della sollecitazione si può dunque ricavare tenendo conto delle convenzioni già adottate e del sistema di riferimento locale scelto (figura 1.98.a-b).

Dalla figura 1.98.c si nota però che, facendo riferimento al concio elementare, qualsiasi sia la scelta del riferimento locale il taglio positivo è costituito da due forze che sul concio danno un momento orario. Anche per lo sforzo normale si riconosce che, qualsiasi sia la scelta del riferimento locale, uno sforzo normale positivo corrisponde ad

una sollecitazione di trazione sul concio elementare.
Pertanto i segni del taglio e dello sforzo normale possono ricavarsi senza dovere necessariamene assegnare per ogni trave un sistema di riferimento locale, mentre tale necessità rimane per dare un segno al momento flettente. Spesso, in luogo degli assi del riferimento locale per ogni trave della travatura si disegna una linea tratteggiata traslando leggermente l'asse di ogni trave dalla parte dell'asse y del riferimento locale stesso. In questo modo si riconosce facilmente che un momento flettente è positivo se tende le fibre dalla parte della linea tratteggiata ed è negativo se tende le fibre dalla parte opposta.
Con riferimento al diagramma del momento per l'arco a tre cerniere di figura 1.84, con la linea tratteggiata scelta in figura 1.99 il momento risulta positivo nel tratto tra B e G e negativo tra A e B e tra G e C.

z
y
N > 0
T > 0
M > 0
z
y
N > 0
T > 0
M > 0
N > 0
T > 0
(a)
(b)
(c)

Figura 1.98: Segno delle caratteristiche della sollecitazione.

F
A
B
C
R_A R_C
E D
G

Figura 1.99: La linea tratteggiata consente di assegnare un segno al momento in ogni punto del diagramma.

1.6 Esercizi proposti

Nei problemi 1-16 si richiede:
• di determinare le reazioni vincolari;
• di tracciare i diagrammi del taglio e del momento;
• di ricavare le espressioni analitiche delle funzioni taglio e momento.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 7.

Problema 8.

Problema 9.

Problema 10.

Problema 11.

Problema 12.

Problema 13.

Problema 14.

Problema 15.

Problema 16.

Nei problemi 17-38 si richiede:

- di determinare le reazioni vincolari per via grafica;
- di tracciare il diagramma del momento per via grafica.

q

Problema 17.

q

Problema 18.

q

Problema 19.

q

Problema 20.

Problema 21.

q

Problema 22.
q
Problema 23.
q
Problema 24.

q
Problema 25.
□
Problema 26.
q
Problema 27.

q
Problema 28.
q
Problema 29.

q
Problema 30.
Problema 31.
Problema 32.

q
Problema 33.
q
Problema 34.
q
Problema 35.

q
Problema 36.
q
Problema 37.
q
Problema 38.

1.7 Cinematica della trave

In questa sezione si studierà il processo deformativo che porta la trave, a partire da una configurazione indeformata che si assume coincidente con quella in cui l'asse è rettilineo, in una deformata.

Si è visto che una trave ad asse rettilineo a sezione costante è definita geometricamente in una modellazione tridimensionale da un dominio avente la forma di un cilindro retto. Nella modellazione tridimensionale la stessa trave è invece definita, sempre dal punto di vista geometrico, dai punti del suo asse, ovvero da un intervallo di <, e dalla geometria delle sezioni rette.

Lo studio della cinematica delle travi nella modellazione monodimensionale può essere svolto a partire da diversi insiemi di ipotesi. Da ognuno di essi scaturisce un diverso modello cinematico. Si prenderà qui in esame il più utilizzato tra i modelli cinematici, ovvero quello noto come modello di trave inflessa, o anche modello di 'Eulero-Bernoulli'. Le due ipotesi alla base di tale modello che, è bene ripetere, è di tipo monodimensionale, traggono in realtà origine da alcune supposizioni che si fanno circa la deformazione della trave nel modello tridimensionale. Le due ipotesi sono le seguenti:

- Le sezioni rette trasversali nella configurazione indeformata si conservano piane durante la deformazione.
- Le sezioni rette rimangono, oltre che piane, anche ortogonali all'asse deformato durante la deformazione.

y

z

$\phi(z\ \ )$

w(z)

v(z)

Figura 1.100: Funzioni v, w e .

La prima ipotesi è anche nota come 'principio di conservazione delle sezioni piane'.

In virtù di essa ha senso considerare quali parametri cinematici da associare a ciascun punto della trave lo spostamento del punto e la rotazione della sezione. Nel caso piano in esame lo spostamento è definito da un vettore del piano della trave di componenti v secondo l'asse y e w secondo l'asse z. La rotazione è invece definita dalla sua unica componente diversa da zero, cioè quella intorno all'asse x. Come si è visto già in precedenza, ragionando direttamente nel piano essa si assume positiva se antioraria.

La componente v è anche detta 'spostamento trasversale', mentre quella w è anche

detta 'spostamento assiale'. Le componenti dello spostamento e la rotazione sono in generale diverse per ogni punto dell'asse e dunque, con riferimento alla figura

1.100,
sono funzioni di z definite nell’intervallo [0, L].
Si considerano per semplicità separatamente i due casi in cui v e sono non nulle e
w è nulla, ed in cui w è non nulla mentre v e sono nulle.
Nel primo caso, in virtù della seconda ipotesi la rotazione (z) è uguale in ogni punto z a quella (z) della tangente all’asse. Data l’ipotesi semplificativa che w è identicamente nulla, la tangente di (z) è uguale in modulo alla derivata $v_0(z)$ (figura
1.101), ed opposta in segno in quanto lo spostamento v in figura è positivo se verso il
basso mentre (z) è positiva se antioraria. Pertanto la rotazione è legata alla funzione
v dalla relazione:
(z) = −arctang $v_0(z)$ (1.43)

y
z
$\phi(z)$
$\alpha(z)$
tang $\alpha = -v'(z)$
$\phi(z) = \alpha(z)$
(z)

Figura 1.101: Relazione tra rotazione e spostamento trasversale.

Si definisce curvatura della trave in un punto z, e si in indicherà con , uno scalare il
cui modulo è dato dall’inverso del raggio di curvatura R(z) dell’asse nel punto z nella
configurazione deformata, se tale raggio è finito, ed il cui segno è uguale a quello di
$_0(z)$. Se il raggio è infinito la curvatura si assume invece nulla. Dalla figura 1.102 si ha
dunque:
(z) =
1
R(z)
= lim
s!0
(z + z) − (z)
s
=
d
d s
=
d
d z
d z
d s
(1.44)
Poiché si ha (figura 1.103):
d s

d z
= lim
z!0
s
z
$= p1 + v_0(z)_2$ (1.45)
ed inoltre dalla (1.43):
d
d z
= −
$v_{00}(z)$
$1 + v_0(z)_2$ (1.46)
si ottiene:
(z) = −
$v_{00}(z)$
$1 + v_0(z)_2$ 0B@
1
d s
d z
1CA
== −
$v_{00}(z)$
$1 + v_0(z)_2$ 1
$p1 + v_0(z)_2$! (1.47)

y
z
$\Delta\phi = \phi(z + \Delta z) - \phi(z)$
z z+ Δ z
Δs
R
Figura 1.102: Curvatura nel tratto [z, z + z].
z z+Δ z
Δ z
sΔ
$dv = v'(z)\,\Delta z + o(z)$
$\Delta s = \Delta z^2 + (v'(z)\,\Delta z)^2 + o(z)$
Δ
Δ
Figura 1.103: Relazione tra s e z.
e quindi la seguente relazione differenziale che lega la funzione v alla curvatura
:
(z) = −
$v_{00}(z)$
$[1 + v_0(z)_2]$
$\frac{3}{2}$
(1.48)
Nel caso in cui w è non nulla mentre v e sono identicamente nulle la curvatura dell’asse della trave risulta identicamente nulla. Dati due punti rispettivamente alle
ascisse z e z + z, la loro distanza l nella configurazione indeformata è z. La loro

distanza l_d nella configurazione deformata è data da (figura 1.104):
$l_d(z) = [z + z + w(z + z)] - [z + w(z)] = z + w(z + z) - w(z)$ (1.49)
Si definisce deformazione assiale della trave all'ascissa z e si indica con "$_a$ il limite del
rapporto ($l_d - l$)/l per z tendente a 0. Dalla (1.49) si ricava:
"$_a$(z) = lim
z!0
$l_d - l$
l
=
z + w(z + z) − w(z) − z
z
=
w(z + z) − w(z)
z
(1.50)
e quindi la seguente relazione differenziale lineare che lega la funzione w alla deformazione
assiale "$_a$:
"$_a$(z) = w_0(z) (1.51)
Nel seguito si farà sempre l'ipotesi che gli spostamenti e le rotazioni siano sufficientemente
piccoli da poter confondere tang con e da poter trascurare il termine $v_0(z)_2$

z z+Δ z
z
w(z) w(z+Δ z)
z+w(z)
z+Δ z+w(z+ Δ z)
l_d
l
Figura 1.104: Deformazione assiale del concio elementare.
rispetto all'unità. In tal caso la relazione (1.43) si semplifica in:
(z) = $-v_0$(z) (1.52)
e la relazione (1.48) si semplifica in:
(z) = $_0$(z) = $-v_{00}$(z) (1.53)
Nel caso più generale in cui w, v e sono tutte non identicamente nulle le relazioni
(1.48) e (1.51) si complicano. In particolare, e "$_a$ risultano entrambi funzioni non
lineari sia di v che di w. Nell'ipotesi che gli spostamenti siano sufficientemente piccoli,
che equivale a considerare trascurabili le derivate v_0 e w_0 rispetto all'unità, si ottiene
però anche nel caso generale un disaccoppiamento del comportamento 'flessionale',
espresso dalla relazione (1.53) da quello 'estensionale', che anche nell'ipotesi di piccoli
spostamenti è espresso dalla (1.51).
E' utile sottolineare che per e "$_a$ entrambi non nulli, la deformazione assiale
rappresenta la dilatazione lineare della fibra baricentrica, ovvero dell'asse della trave.
Nell'ipotesi di piccoli spostamenti le relazioni che sintetizzano la cinematica del

modello di trave di Eulero-Bernoulli si riassumono dunque come segue:
8>>><>
>>:
$(z) = -v_{0}(z)$
$(z) = {}_{0}(z) = -v_{00}(z)$
$"_{a}(z) = w_{0}(z)$
(1.54)
Tali relazioni vanno affiancate da opportune condizioni al contorno fornite dalle eventuali
condizioni di vincolo cinematico presenti.
La curvatura e la deformazione assiale $"_{a}$ possono vedersi come le ‘deformazioni’
nel modello di trave di Eulero-Bernoulli. Tali deformazioni sono nulle per uno
spostamento rigido, in cui v_{00} e w_{0} sono identicamente nulle.

1.8 Legame elastico lineare per il modello di trave piana di Eulero-Bernoulli

Fino ad ora si sono studiati due aspetti del modello di Eulero-Bernoulli per le travature
piane, quello statico e quello cinematico. Per definire completamente il modello
strutturale rimane da definire il legame costitutivo, ovvero la legge che lega le deformazioni
del modello, ovvero nel caso in esame la deformazione assiale e la curvatura, alle
caratteristiche della sollecitazione, ovvero lo sforzo normale ed il momento flettente.
La scelta del legame costitutivo più efficace dipende dal problema in esame. Qui si
introdurrà un legame costitutivo di tipo elastico lineare, che non solo è il più semplice
da trattare dal punto di vista matematico ma è anche estremamente efficace a riprodurre
il comportamento delle travi nella maggioranza delle applicazioni ingegneristiche. Esso
traduce ad un livello mediato sull’intera sezione l’ipotesi di comportamento elastico
lineare di ciascun punto della sezione, comportamento che si studierà in modo più approfondito
nella parte del corso sulla meccanica del continuo. Nella realtà i più comuni
materiali usati per le applicazioni strutturali (ad esempio acciaio, alluminio, materiali
compositi fibrorinforzati) presentano un comportamento reale che è perfettamente
schematizzato da un legame elastico lineare quando le sollecitazioni non superano determinati
valori limite. Altri importanti materiali, come il calcestruzzo, non presentano
un comportamento perfettamente schematizzabile come elastico lineare ma anche per
essi l’ipotesi di elasticità lineare fornisce un’approssimazione accettabile in moltissimi
casi e sempre entro valori limitati della solllecitazione.

Il legame elastico lineare per la trave di Eulero-Bernoulli lega la deformazione assiale e la curvatura alle caratteristiche della sollecitazione mediante le seguenti due leggi di proporzionalità :

N = K_a "$_a$ M = K_f (1.55)

I coefficienti K_a e K_f rappresentano rispettivamente la ‘rigidezza estensionale’ e la ‘rigidezza flessionale’ della trave. In questa trattazione tali coefficienti potrebbero essere introdotti senza altra ulteriore precisazione, semplicemente mediante la definizione (1.55). Tuttavia è utile in tale contesto fare una sorta di anticipazione di alcuni risultati, che si ricaveranno in seguito studiando un modello tridimensionale della trave, per legare le due rigidezze appena definite alle proprietà meccaniche del materiale ed a quelle geometriche della sezione retta della trave. Si limita qui l’analisi al caso delle travi con caratteristiche meccaniche omogenee, ovvero non variabili da punto a punto né lungo l’asse z né sulla sezione retta.

Trattando dapprima il caso di sola deformazione assiale, ovvero "$_a$ 6= 0 e = 0, si consideri il concio di trave riportato in figura 1.105.a nella sua configurazione indeformata e si consideri una modellazione tridimensionale dello stesso. Si assuma inoltre che la deformazione "$_a$ sia costante nell’intervallo [z, z + z]. Tutte le fibre longitudinali saranno caratterizzate dallo stesso valore della deformazione in direzione longitudinale ", pari proprio a "$_a$ (figura 1.105.b):

" = "$_a$ =

l_d − l

l

(1.56)

dove ancora l ed l_d indicano le lunghezze iniziale e finale della fibra.

Sulla sezione, alla deformazione " il legame elastico associa una tensione = d F/dA, ovvero una forza d F per unità di superficie della sezione dA (figura 1.106), ad essa proporzionale. Il coefficiente di proporzionalità è detto ‘modulo elastico’, o ‘modulo di Young’, ed è indicato con E:

 = E " (1.57)

Si è detto che si limita qui l’analisi al caso delle sezioni omogenee, per le quali il modulo elastico è costante, per cui ad un diagramma costante di deformazioni sulla sezione corrisponde un diagramma costante di tensioni[13] pari a = E "$_a$ (figura

1.106).
In questo caso, come si vedrà meglio nel seguito del corso, il momento risultante delle
tensioni intorno all'asse x è nullo, e quindi M = 0, mentre lo sforzo normale deve
evidentemente euagliare la risultante delle tensioni sulla sezione, ovvero si ha:
N = ZA
dA = E "a ZA
d ,A = EA"a (1.58)
z z+Δ z
Δz
z
(a) (b)
l = Δz
N N N N
l = (1+εa) Δz d
Figura 1.105: Deformazione assiale: (a) concio indeformato; (b) concio deformato.
Passando ora al caso della sola flessione, ovvero "a = 0 e 6= 0, si consideri il concio
di trave riportato in figura 1.106.a nella sua configurazione indeformata e si consideri
una modellazione tridimensionale dello stesso. Si indichi per semplicità con PQ sia
il segmento congiungente due punti P e Q che la sua lunghezza. La generica fibra
longitutinale della trave, avente una coordinata y nel sistema di riferimento in figura
1.107, avra lunghezza z nella configurazione indeformata. Pertanto le lunghezze AB
e A_oB_o dei segmenti riportati in figura 1.107.a sono entrambe pari a z.
Avendosi solo deformazione flessionale, ovvero essendo "a = 0, nella configurazione
deformata del concio riportata in figura 1.107.b il segmento baricentrico A_oB_o si

[13] E' utile comunque accennare che l'estensione della trattazione al caso di travi non omogenee viene
fatta conservando l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui nel caso di pura deformazione
assiale si ha ancora un diagramma costante delle deformazioni mentre il diagramma delle tensioni sulla
sezione ottenuto tramite la (1.57) non sarà costante. Il caso delle travi non omogenee è peraltro di estremo
interesse in quanto è quello delle travi in cemento armato, o in materiale composito fibrorinforzato.

σ
y
z
dA
N N
σ
x
y
dF

σ =
dF
dA
Figura 1.106: Diagramma delle tensioni sulla sezione nel caso di sola deformazione
assiale.
A'o B'o
A' B'
z z+Δ z
A B
Ao Bo
Δϕ
Δz
y z
(a) (b)
R
R + y
Figura 1.107: Deformazione delle fibre longitudinali nel caso di sola flessione.
trasforma in un segmento $A_{0o}B_{0o}$ di uguale lunghezza, per cui si ha $A_{0o}B_{0o}$ = z. Invece,
la lunghezza di un segmento longitudinale non baricentrico avente una coordinata y non
nulla non avrà più lunghezza z. Se la curvatura è positiva, come nel caso in figura,
i segmenti longitudinali posti ad y > 0 si allungano mentre quelli posti ad una coordinata
y < 0 si contraggono. Considerando un valore costante della curvatura , l'asse
baricentrico della trave e ciascuna delle altre fibre longitudinali si trasformano dopo la
deformazione in un arco di cerchio, di raggio R = 1/. Detto l'angolo formato tra

σ(y)
y
z
M
M
dA
x
y
dF
σ =
dF
dA
y y
Figura 1.108: Diagramma delle tensioni sulla sezione nel caso di sola flessione.
le sezioni alle ascisse z e z + z nella configurazione deformata, si ha:
z = AB = A_oB_o = $A_{0o}B_{0o}$ = R A_0B_0 = (R + y) (1.59)
La deformazione del segmento AB di coordinata y è data da:
"(y) =
A_0B_0 − AB
AB
=

$(R + y) - R$
R
=
y
R
= y (1.60)
Alla deformazione "(y) il legame elastico associa una tensione (y) = E "(y). Si ha
quindi:
(y) = E "(y) = E y (1.61)
Le caratteristiche della sollecitazione devono rappresentare un sistema equivalente all'insieme
delle tensioni agenti puntualmente sulla sezione, e quindi il momento flettente M sulla sezione deve essere pari al momento risultante delle tensioni intorno all'asse
x. Si ha dunque:
$M = Z_A$
d F y = Z_A
(y) y dA = E Z_A
y_2 dA = EI (1.62)
avendo indicato con I il 'momento d'inerzia' della sezione[14], dato da:
$I = Z_A$
y_2dA (1.63)
Si vedra rigorosamente in seguito invece che in questo caso la risultante secondo z delle
tensioni è nulla, per cui si ha che N = 0.
Concludendo, le rigidezze assiale e flessionale sono date da:
K_a = EA K_f = EI (1.64)

[14]Poiché nelle travature piane la flessione della trave avviene sempre intorno all'asse x, non si mette
nessun pedice per specificare che il momento d'inerzia I è quello intorno all'asse x. Analogamente si
sottointende, nelle travature piane, che $M = M_x$.

e le (1.55) possono riscriversi:
N = EA"$_a$ M = EI (1.65)
o equivalentemente:
"$_a$ =
N
EA
=
M
EI
(1.66)
Tali relazioni sono state derivate assumendo che la deformazione e la curvatura siano
costanti su [z, z + z]. Per l'arbitrarietà di z evidentemente valgono anche al limite
per z ! 0, per cui possono essere assunte come relazioni puntuali anche quando i
diagrammi della deformazione assiale e della curvatura, o equivalentemene dello sforzo

normale e del momento, non sono costanti.

1.8.1 Distorsioni termiche

Le deformazioni nelle strutture possono essere indotte da uno stato di sforzo interno, come si è visto nel paragrafo precedente, oppure possono essere indotte da altre azioni quali ad esempio variazioni termiche o di umidità, reazioni chimiche, cambiamenti di fase. Tali tipi di deformazioni sono dette ‘distorsioni’.

Si studierà qui il caso delle distorsioni termiche, che è di grande importanza per quasi tutte le tipologie strutturali. Peraltro altri tipi di distorsioni si trattano in modo analogo.

Si consideri il generico concio di trave riportato in figura 1.109 e si assuma che sforzo normale e momento flettente siano nulli mentre la temperatura del materiale sia passata uniformemente dal valore t_o della configurazione indeformata ad un valore t, con una variazione dunque $t = t - t_o$. In questo caso la distorsione termica è detta ‘uniforme’ ed ogni fibra longitudinale del concio, di lunghezza iniziale $l = z$, si deforma e la sua viariazione di lunghezza è pari a $l_d - l = t z$, avendo indicato con il coefficiente di dilatazione termica del materiale, che ha le dimensioni dell’inverso di una temperatura. La deformazione assiale della trave vale dunque:

"$_a$ =

$l_d - l$

l

$= t$ (1.67)

mentre la curvatura è nulla. Si noti quando $t > 0$ la deformazione di tutte le fibre è positiva e quindi "$_a > 0$. Ovviamente, se $t < 0$ dalla (1.67) si ottiene coerentemente che "$_a < 0$.

Si parla invece di distorsione termica ‘a farfalla’ quando le fibre longitudinali sono soggette ad una variazione di temperatura rispetto a quella iniziale t_o della configurazione indeformata che è variabile linearmente con la coordinata y, e che è nulla per $y = 0$.

Dalla figura 1.110 si vede che la variazione di lunghezza l(y) della fibra longitudinale di coordinata y è pari a

$l(y) = (t(y) - t_o)\, z =$

$t_i - t_s$

H

$y\, z$ (1.68)

dove H indica l’altezza della sezione, t_s e t_i indicano i valori della temperatura rispettivamente ai lembi superiore ed inferiore. Essendo $l = z$, la deformazione della fibra è

dunque data da:
"(y) =
l(y)
l
=
$t_i - t_s$
H
y (1.69)

y
z
y
t_o t
Δt = t - t
H
t (temperatura)
o
Figura 1.109: Distorsione termica uniforme.
y
z
y
t_s t_o t_i
Δt = t - t_i s
H
t (y)
t (temperatura)
Figura 1.110: Distorsione termica ‘a farfalla’.
Ponendo;
"(y) = y (1.70)
ed indicando nel caso della distorsione a farfalla con t = $t_i - t_s$, si ricava:
 =
 t
H
(1.71)
mentre la deformazione assiale è nulla in quanto la fibra baricentrica rimane indeformata
essendo t(y = 0) = t_o.
Si osserva che quando t > 0 la curvatura è positiva, mentre se t < 0 dalla (1.71)
si ottiene coerentemente una curvatura negativa.
Il caso più generale di una variazione di temperatura che varia linearmente con y, ma
che non si annulla per y = 0, può decomporsi come sovrapposizione di una distorsione
uniforme e di una distorsione a farfalla.
Si noti che si è utilizzato lo stesso simbolo t per indicare sia il valore costante della
variazione di temperatura nel caso della distorsione termica uniforme, sia la differenza
tra le temperature al lembo inferiore e superiore nel caso della distorsione termica a
farfalla. Cio sia al fine di uniformarsi alla notazione classicamente utilizzata, sia perché
l’ambiguità della notazione viene superata utilizzando nel disegno degli schemi strutturali

simbologie diverse, come indicato in figura 1.111. In particolare, per indicare una
distorsione a farfalla si utilizza la simbologia di figura 1.111.a, mentre per la distorsione
uniforme si utilizza o quella di figura 1.111.b, o più semplicemente, quella di figura
1.111.c.

D_t D_t
D_t
(a) (b)
(c)
Figura 1.111: Simbologia delle distorsioni termiche.

1.8.2 Sovrapposizione delle deformazioni elastiche e delle distorsioni

Si consideri ora il caso più generale in cui il comportamento del materiale è elastico
lineare e le deformazioni nella trave siano indotte sia dalla presenza sia di caratteristiche
della sollecitazione non nulle che di distorsioni termiche di tipo sia uniforme che a
farfalla.

Valendo il principio della sovrapposizione degli effetti, i valori della deformazione
assiale e della curvatura si ottengono allora come somma di quelli che si otterrebbero in
presenza solamente delle caratteristiche della sollecitazione e di quelli dovuti solamente
alle distorsioni termiche. In particolare, la deformazione assiale e la curvatura si decompongono
nella somma di una parte elastica, "$_{el}$ ed $_{el}$, e di una dovuta alle distorsioni,
"$_{dist}$ ed $_{dist}$. Nel caso delle distorsioni termiche visto in precedenza si ha in particolare:

"$^{el}_{a} = \frac{N}{EA}$ "$^{dist}_{a} = t$ $_{el} = \frac{M}{EI}$ $_{dist} = \frac{t}{H}$ (1.72)

da cui si ricavano le seguenti relazioni generali:

"$_a$ = "$^{el}_{a}$ + "$^{dist}_{a} = \frac{N}{EA}$

$+ \; t \; = {}_{el} + {}_{dist} =$
$\frac{M}{EI} + \frac{t}{H}$
(1.73)

1.9 Il problema dell’equilibrio elastico per il modello di Eulero-Bernoulli

L’insieme delle equazioni differenziali (1.51) e (1.53), che definiscono la cinematica del modello di Eulero-Bernoulli, delle equazioni (1.73), che rappresentano il legame elastico lineare in presenza di disorsioni termiche, e delle equazioni differenziali di equilibrio (1.24)$_1$ e (1.25), insieme alle condizioni al contorno di carattere statico e

cinematico, definiscono il problema dell’equilibrio elastico per tale modello. Esse si riportano di seguito:

Problema
dell’equilibrio
elastico
2666666666666666664
cinematica 8<:
$"_a = w_0$
$= {}_0 = -v_{00}$
legame elastico 8>><>>:
$"_a =$
$\frac{N}{EA} + \; t$
$=$
$\frac{M}{EI} + \frac{t}{H}$
equilibrio 8<:
$N_0 = -p$
$M_{00} = -q$
(1.74)

Le condizioni al contorno possono essere di tipo statico, del tipo di quelle studiate nella sezione 1.4.4, o di tipo cinematico.

In tale problema sono assegnati la geometria della travatutra piana (gli assi delle travi che la compongono e le sezioni rette delle travi), i parametri del materiale (il modulo di Young E ed il coefficiente di dilatazione lineare), i vincoli e le azioni (forze,

coppie,
carichi distribuiti, distorsioni termiche e cedimenti). Le incognite sono le funzioni spostamento
assiale w e trasversale v, le deformazioni del modello, ovvero la deformazione assiale "$_a$ e la curvatura , nonché le caratteristiche della sollecitazione N ed M.
Esprimendo queste ultime in funzione di "$_a$ e mediante le inverse delle (1.74)$_{3-4}$
si ottiene: 8>><>>:
N= EA("$_a$ − t)
M= EI −
 t
H (1.75)
Sostituendo in tali relazioni, ad "$_a$ e , le relazioni cinematiche (1.74)$_{1-2}$ si ottiene:
8>
><>>:
N= EA(w$_0$ − t)
M= EI −v$_{00}$ −
 t
H (1.76)
Sostituento infine queste ultime espressioni nelle equazioni differenziali di equilibrio
(1.74)$_{5-6}$ si ricava: 8>><>>:
[EA(w$_0$ − t)]$_0$ = −p
EI −v$_{00}$ −
 t
H $_{00}$
= −q
(1.77)
Le equazioni (1.77) forniscono la cosiddetta ‘formulazione agli spostamenti’ del problema
dell’equilibrio elastico, e sono anche note come ‘equazioni della linea elastica’. In
esse le uniche incognite rimaste sono le funzioni spostamento w e v, note le quali è possibile
ricavare le deformazioni e le caratteristiche rispettivamente mediante (1.74)$_{1-2}$ e

le (1.75). Le (1.77) sono valide nel caso generale in cui sia le rigidezze EA ed EI che le
distorsioni termiche sono variabili da punto a punto (purché continue e sufficientemente
derivabili).
Nel caso in cui le rigidezze EA ed EI sono costanti, o almeno costanti a tratti, e le
distorsioni termiche sono nulle le (1.77) si specializzano come segue:
8<:
EAw$_{00}$ = −p
EI v$_{0000}$ = q
(1.78)
Si vede inoltre facilmente che, se il coefficiente è costante, le (1.78) valgono anche in

presenza di una distorsione termica uniforme costante con z e di una a farfalla variabile linearmente con z. Alle (1.77) e (1.78) bisogna ovviamente aggiungere le opportune condizioni al contorno.

1.9.1 Esistenza ed unicità

Esistenza

E’ possibile dimostrare che, per una struttura labile, la soluzione del problema dell’equilibrio elastico formulato nella sezione precedente esiste se e solo se esiste quella dell’equilibrio. Ciò implica che per una struttura non labile la soluzione esiste sempre.

Unicità

Se la soluzione esiste si dimostra che essa è unica in termini di deformazioni "a e ed in termini di caratteristiche della sollecitazione N e M, mentre è definita a meno di un arbitrario spostamento rigido infinitesimo (consentito dai vincoli) in termini di spostamenti.

Evidentemente per strutture non labili non esistono spostamenti rigidi infinitesimi consentiti dai vincoli, per cui la soluzione in questo caso è unica anche in termini di spostamenti.

Tale risultato è noto come ‘principio di Kirchhoff’ e la sua dimostrazione si basa sulle ipotesi di piccoli spostamenti e di comportamento elastico del materiale.

1.9.2 Principio di sovrapposizione degli effetti

Le equazioni che definiscono il problema dell’equilibrio elastico sono lineari. Ciò significa che se si amplificano tutte le azioni (forze, coppie, carichi, distorsioni e cedimenti) per un unico fattore , tutti gli effetti (spostamenti, deformazioni e caratteristiche della sollecitazione) sono moltiplicati per .

Più in generale, si vede facilmente che, dato un sistema di azioni A ottenuto come sovrapposizione di singole azioni A_i, la soluzione si ottiene sommando fra loro le soluzioni ottenute per ciascuna delle singole azioni A_i.

Tale risultato è noto come ‘principio di sovrapposizione degi effetti’, e la sua validità dipende dalla validità delle ipotesi che hanno condotto alla linearità delle equazioni, ovvero la piccolezza degli spostamenti ed il comportamento elastico lineare.

1.9.3 Integrazione delle equazioni della linea elastica: cenni al caso generale.

In generale, la soluzione delle equazioni (1.77) o, nel caso più semplice, le

(1.78), si
ricava in modo analogo sia per le strutture isostatiche che per quelle isostatiche. Inoltre
la travatura può essere costituita da travi i cui assi sono tutti appartenenti ad una stessa
retta (trave ad asse rettilineo), oppure può essere costituita anche da un sistema piano
di travi, ciascuna rettilinea, i cui assi però non appartengono ad una stessa retta (telaio).
In entrambi i casi conviene scrivere le equazioni differenziali separatamente in ciascun
tratto in cui le espressioni sono costanti.
Con riferimento alla trave ad asse rettilineo di figura 1.112, per gli integrali indefiniti
delle funzioni v e w si ricavano espressioni diverse nei tratti AB, BC e CD, in funzione
di un certo numero di costanti di integrazione. Queste ultime si determinano imponento
delle condizioni al contorno nei punti A, B, C e D. Alcune di queste sono di carattere
statico, cioè sul momento e sullo sforzo normale, del tipo di quelle studiate nella sezione
1.4.4, mentre altre sono di carattere cinematico, del tipo di quelle che si studieranno
nella sezione che segue.

Dt

q

a F M

a b c

A

B

C

D

Figura 1.112: Problema dell’equilibrio elastico per una trave iperstatica ad asse rettilineo orizzontale.

1.9.4 Integrazione delle equazioni della linea elastica: le travi isostatiche e gli schemi noti

Si è visto che per le travature isostatiche è possibile calcolare i diagrammi delle caratteristiche
indipendentemente dalla deformabilità della struttura, fatta salva la validità dell’ipotesi
di piccoli spostamenti. In altri termini, le equazioni di equilibrio $(1.74)_{5-6}$, insieme
alle condizioni al contorno di tipo statico, possono essere risolte indipendentemente
dalla soluzione delle $(1.74)_{1-4}$.
Una volta note le caratteristiche N e M, dalle $(1.74)_{3-4}$ si ricavano le deformazioni
"$_a$ e e dunque è possibile ricavare gli spostamenti mediante semplice integrazione

delle $(1.74)_{1-2}$.
Si consideri allora lo schema di figura 1.113. Evidentemente lo sforzo normale è identicamente nullo. Non essendoci nessuna distorsione termica uniforme si ha $w_0 = 0$, da cui si ottiene un valore costante di w. Essendo poi $w(0) = 0$ si ricava che w è identicamente nulla, come peraltro intuibile.

Per ricavare l'espressione di v, si parte dall'espressione del momento flettente:
$M(z) = -F (L - z)$ (1.79)
Essendo nulla la distorsione termica a farfalla si ricava l'espressione della curvatura:
$(z) = -v_{00}(z) = -$
F
EI
$(L - z)$ (1.80)
Integrando due volte si ottiene:
$v(z) = c_1 + c_2 z +$
$F Lz_2$
$2EI -$
$F z_3$
$6EI$
(1.81)
e l'espressione della rotazione:
$(z) = -v_0(z) = -c_2 -$
$F L z$
EI
$+$
$F z_2$
$2EI$
(1.82)
Le condizioni al contorno da scrivere sono di tipo cinematico, in quanto riguardano solamente spostamenti e/o rotazioni. In questo caso esse sono:
$v(0) = 0$ $(0) = 0$ (1.83)
e forniscono valori nulli delle costanti, cioè $c_1 = c_2 = 0$. Si ottiene in definitiva:
$v(z) =$
$F Lz_2$
$2EI -$
$F z_3$
$6EI$
$(z) = -$
$F Lz$
EI
$+$
$F z_2$
$2EI$
(1.84)
Per $z = L$ si ottengono i valori dello spostamento e della rotazione in B riportati in figura 1.113.
Nello schema della mensola con carico distribuito di figura 1.114 si ricava

analogamente
w = 0, mentre per lo spostamento trasversale si ha:

$$M(z) = -\frac{q L^2}{2} + q L z - \frac{q z^2}{2}$$

$$(z) = -v''(z) = -\frac{q L^2}{2EI} + \frac{q L z}{EI} - \frac{q z^2}{2EI}$$

$$v(z) = c_1 + c_2 z + \frac{q L^2 z^2}{4EI} - \frac{q L z^3}{6EI} + \frac{q z^4}{24EI}$$

$$(z) = -c_2 - \frac{q L^2 z}{2EI} + \frac{q L z^2}{2EI} - \frac{q z^3}{6EI} \qquad (1.85)$$

Tenendo conto delle medesime condizioni al contorno (1.83) si ottiene $c_1 = c_2 = 0$ da cui:

$$v(z) = \frac{q L^2 z^2}{4EI} - \frac{q L z^3}{6EI} + \frac{q z^4}{24EI}$$

$$(z) = -\frac{q L^2 z}{2EI} + \frac{q L z^2}{2EI} - \frac{q z^3}{6EI}$$

(1.86)

che per z = L forniscono i valori riportati in figura 1.114.
Per lo schema della mensola con la distorsione termica costante di figura 1.115 si ha:

$$(z) = -v_{00}(z) = \frac{t}{H} \quad (1.87)$$

da cui integrando e tenendo conto delle condizioni al contorno (1.83):

$$v(z) = -\frac{t\, z^2}{2H} \qquad (z) = \frac{t\, z}{H} \quad (1.88)$$

da cui i valori riportati in figura.
Per la trave di figura 1.116 essendo nulle sia la curvatura elastica che quella anelastica si ha $v_{00} = 0$, da cui: $v(z) = c_1 + c_2 z$, ovvero uno spostamento rigido. Le condizioni al contorno (1.83) impongono però v = 0 identicamente.
Per lo spostamento assiale w, invece, si ha:

$$N(z) = F\ )\ "_a(z) = w_0(z) = \frac{F}{EA}\ )\ w(z) = c_1 + \frac{F}{EA} z \quad (1.89)$$

Dalla condizione al contorno w(0) = 0 si ottiene $c_1 = 0$ e quindi:

$$w(z) = \frac{F}{EA} z \quad (1.90)$$

da cui il valore dello spostamento in B riportato in figura.
Per gli schemi delle figure 1.119-1.124 si opera in modo analogo. Ciò che cambia sono le condizioni al contorno, che per la trave appoggiata di lunghezza L e con ascissa z 2 [0, L] sono date da:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (1.91)$$

Inoltre, per la trave appoggiata con la forza verticale in mezzeria di figura 1.119 bisogna dividere il dominio di integrazione nei due tratti a sinistra e a destra di M e scrivere in M le condizioni di continuità per gli spostamenti a destra ed a sinistra diM, $v_{M,s}$ e $v_{M,d}$ nonché per le rotazioni a sinistra e a destra $_{M,s}$ e $_{M,d}$:

$$v_{M,s} = v_{M,d} \quad _{M,s} = {}_{M,d} \quad (1.92)$$

La soluzione dei problemi delle figure 1.113-1.124 sono estremamente utili ed i relativi

schemi verranno in seguito indicati come ‘schemi noti’. La soluzione di molti problemi, sia per travature isostatiche che iperstatiche, è spesso ricavabile mediante un
opportuno utilizzo dei risultati per gli schemi noti.
Pertanto conviene ricordare i risultati di tali schemi a memoria. A tale scopo è utile
verificare che una semplice analisi dimensionale consente di ricavare, in modo non
mnemonico, l’esponente di L in ciascuno dei risulati degli schemi noti, per cui è necessario
ricordare solamente il coefficiente che compare a denominatore nelle formule che
forniscono spostamenti e rotazioni.

F
L
A B
y
z
v_B
ϕ_B
$v_B =$
$F L^3$
$3EI$
$_B = -$
$F L^2$
$2EI$

Figura 1.113: Trave a mensola con forza trasversale all’estremità.

q
L
A B
y
z
v_B
ϕ_B
$v_B =$
$q L^4$
$8EI$
$_B = -$
$q L^3$
$6EI$

Figura 1.114: Trave a mensola con carico distribuito trasversale.

L
A B
y
z
v_B
Δt ϕ_B
$v_B = -$
tL^2
$2H$
$_B =$

tL
H
Figura 1.115: Trave a mensola con distorsione termica a farfalla.
F
L
A B
w
B
$w_B =$
F L
EA
Figura 1.116: Trave a mensola con forza orizzontale all’estremità.

M
L
A
B
y
v z B
f_B
$v_B = -$
ML^2
2EI
$_B =$
ML
EI
Figura 1.117: Trave a mensola con coppia all’estremità.
L
A B
w
B
Δt
$w_B =$ tL
Figura 1.118: Trave a mensola con distorsione termica uniforme.
F
L/2
A B
L/2
M
$v_M =$
$F L^3$
48EI
$_A = -_B = -$
$F L^2$
16EI
Figura 1.119: Trave appoggiata con forza trasversale in mezzeria.
q
L/2
A B

L/2
M
$v_M =$
5
384
$q L^4$
EI
$_A = -_B = -$
$q L^3$
24EI
Figura 1.120: Trave appoggiata con carico distribuito trasversale.

L/2
A B
L/2
M M
$v_M = -$
ML^2
16EI
$_A =$
ML
3EI
$_B = -$
ML
6EI
Figura 1.121: Trave appoggiata con coppia ad un estremo.
L/2
A B
L/2
Δt M
$v_M =$
tL^2
8H
$_A = -_B = -$
tL
2H
Figura 1.122: Trave appoggiata con distorsione a farfalla.
F
L
A B $w_B =$
F L
EA
Figura 1.123: Trave appoggiata con forza orizzontale all’estremità.
L
A B
Δt
$w_B = tL$
Figura 1.124: Trave appoggiata con forza orizzontale all’estremità.

1.10 Travi iperstatiche ad asse rettilineo

Per le travature iperstatiche si è visto che la soluzione dell’equilibrio non è unica. Per una travatura N volte iperstatiche esistono infatti1_N soluzioni del problema dell’equilibrio.
Ciascuna di queste si dice anche una ‘soluzione equilibrata’.
Si è visto però che, in virtù del principio di unicità di Kirchhoff, per una travatura iperstatica (non labile) la soluzione del problema dell’equilibrio elastico è unica. Essa va quindi trovata necessariamente mettendo in gioco anche la deformabilità della struttura e dunque le relazioni $(1.74)_{1-4}$.
Il metodo che si illustra di seguito per la soluzione di travi iperstatiche ad asse rettilineo è noto come ‘metodo delle equazioni di congruenza’, o anche come ‘metodo delle forze’. Con esso si determina tra tutte le 1_N soluzioni equilibrate l’unica che è anche congruente.

1.10.1 Problema 1

Per illustrare il metodo si considera la trave una volta iperstatica di figura 1.125.a. Se si elimina l’appoggio in B, che è un vincolo semplice, lo schema che si ottiene è un sistema isostatico. Per ottenere uno schema isostatico equivalente a quello reale bisogna aggiungere la reazione del vincolo eliminato, indicata in figura con X, ed imporre una condizione di congruenza in B.
La condizione di congruenza si ottiene facilmente tenendo conto che, nello schema reale, il vincolo in B esiste ed impone la condizione $v_B = 0$. Lo schema di figura 1.125.b, combinato con l’equazione di congruenza $v_B = 0$, è detto allora ’sistema isostatico equivalente’.
La reazione X del vincolo eliminato è detta ‘incognita iperstatica’ o anche ‘reazione iperstatica’.

q
A B
X
q
L
A B
L
Sistema isostatico
Sistema reale equivalente (S.I.E.)
(a)
(b)

Figura 1.125: Problema 1: (a) sistema reale; (b) sistema isostatico equivalente.

L’equazione di congruenza si scrive tenendo conto che lo schema di figura 1.125.b è dato dalla sovrapposizione di uno schema con il solo carico q e di uno con la sola forza X. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, nonché i risultati degli

schemi noti, si ottiene allora:

$$v_B = v^q_B + v^X_B = \frac{q L^4}{8EI} - \frac{X L^3}{3EI} \quad (1.93)$$

avando indicato con v^q_B e v^X_B rispettivamente gli spostamenti verticali in B per effetto del solo carico q e della sola forza X. L’equazione di congruenza si scrive semplicemente uguagliando a zero l’espressione precedente:

$$v^q_B + v^X_B = \frac{q L^4}{8EI} - \frac{X L^3}{3EI} = 0 \quad (1.94)$$

da cui si ottiene:

$$X = \frac{3}{8} q L \quad (1.95)$$

Si noti che quando si è introdotta l’incognita iperstatica X non era noto il verso della reazione in B. Pertanto la posizione fatta implicitamente nella figura 1.125.b è che se X è positiva allora la reazione in B è diretta verso l’alto, mentre se X è negativa, la reazione in B è diretta verso il basso. Dal risultato ottenuto si evince che la reazione in B è diretta verso l’alto.

Nella figura 1.126 sono riportate anche le deformate dovute al solo carico ed alla sola incognita iperstaticaX. Queste sono ottenute ‘a maniera’, ovvero in modo approssimato ma allo stesso tempo molto vicino al vero (a meno della scala ovviamente) tenendo conto della curvatura indotta dal diagramma del momento e dalle condizioni al contorno che impongono nel caso in esame spostamento e rotazione nulla sull’incastro.

Si vede in particolare che per effetto del solo carico il punto B si abbasserebbe

e che
dunque affinché la forza X ripristini la congruenza ed annulli lo spostamento in B essa
deve essere diretta verso l'alto.
Nota l'incognita iperstatica X è possibile ricavare il diagramma del momento semplicemente
guardando la X come una forza nota e operare direttamente sullo schema isostatico equivalente.

1.10.2 Problema 2

Nel problema di figura 1.127.a si è anche introdotto un cedimento di rotazione nell'incastro
pari a . Ciò vuol dire che le condizioni vincolari imposte dall'incastro non sono più v_A = $_A$ = 0, ma bensì v_A = 0 e $_A$ = .
Inoltre, nel risolvere il problema 2 si vuole anche mostrare che la scelta del sistema
isostatico equivalente non è univoca. E' possibile infatti eliminare un vincolo esterno
semplice diverso dal carrello in B, ottenendo così un S.I.E. diverso da quello scelto nel
problema 1. Sarebbe possibile anche eliminare un vincolo interno semplice, come si
vedrà meglio in seguito.
Avendo 'declassato' l'incastro rendendolo una cerniera, nel S.I.E. bisogna aggiungere
la coppia reattiva dell'incastro come incognita iperstatica X e scrivere una corrispondente
equazione di congruenza. In questo caso, però, nel sistema reale l'incastro
non impone una rotazione nulla ma bemsì una rotazione pari a , per cui l'equazione di
congruenza si scrive:

$_A$ = ^q_A + ^X_A = (1.96)

A
B
X
q
A B
A B
X
q
v_B^q
v_B^X
+
=
q
=
$\frac{qL^2}{2}$

XL
qL
2
8
5
qL
2
8
A
B
qL
8
5
qL
8
3 =
=
v 0 B=
qL
8
5 qL
8
3
qL
2
8
(a)
(b)
(c)
(d)
Figura 1.126: Problema 1: soluzione con il metodo delle equazioni di congruenza.
q
A
X B
q
L
A
B
L
Sistema isostatico
Sistema reale equivalente (S.I.E.)
(a)
(b)
γ
Figura 1.127: Problema 2: presenza di un cedimento anelastico dell'incastro e scelta
di un S.I.E. diverso da quello del problema 1.
Sostituendo i risultati degli schemi noti si ha:
q
A = −
q L3
24EI
XA
=

X L
3EI) −
q L^3
24EI
+
X L
3EI
= (1.97)
da cui si ottiene:
X = −
q L^2
8
+
3EI
L
(1.98)

L'unica regola che bisogna tenere ben presente è che nel levare un vincolo semplice
bisogna fare in modo da eliminare il grado di iperstaticità, passando da i = 1 a i =
0 in questo caso, e non aumentare il grado di labilità. I due schemi di figura 1.128
rappresentano esempi di tale tipo di errore.
X A B
A
B
Sistema reale Scelta sbagliata del vincolo eliminato
(struttura labile)
A
B
A
X X B
Figura 1.128: Problema 2: scelta sbagliata del vincolo eliminato.

1.10.3 Problema 3

Nel problema di figura 1.129.a. si potrebbe pensare di eliminare l'appoggio interno e
sostituirlo con l'incognita iperstatica, come mostrato in figura 1.129.b. Tale scelta è
legittima, in quanto effettivamente lo schema ottenuto è isostatico e la scrittura della
corrispondente equazione di congruenza v_B = 0 condurrebbe alla soluzione del problema.
Tuttavia, per determinare la soluzione in questo modo non si riuscirebbero ad utilizzare gli schemi noti e dunque il S.I.E. così scelto non è conveniente.
Uno S.I.E. conveniente si ottiene eliminando, in luogo di un vincolo esterno, un vincolo interno, ed in particolare sostituendo al vincolo triplo di continuità in B, uno
doppio costituito da una cerniera[15].
L'incognita iperstatica che bisogna aggiungere sullo S.I.E. è evidentemente la reazione
che il vincolo eliminato nella realtà può trasmettere. Ma essendo questo un vincolo

interno, la reazione in realtà è un sistema di due reazioni, ovvero le due reazioni mutue che si scambiano in B le parti a destra ed a sinistra di B. In questo caso tali reazioni sono le due coppie che rappresentano il momento flettente in B. Esse sono due coppie uguali ed opposte il cui valore X è dunque l'incognita iperstatica del problema.

[15]Si noti bene che il carrello in B va lasciato in quanto se eliminato si avrebbe ad una struttura labile.

Per capire quale sia l'equazione di congruenza da scrivere basta osservare che, nello schema con la cerniera in B sarebbe possibile avere rotazioni a destra ed a sinistra di B diverse, ovvero potrebbe avvenire ${}_{Bs} \neq {}_{Bd}$, mentre nello schema reale ciò non può avvenire. L'equazione di conguenza è dunque:

$${}_{Bs} = {}_{Bd} \quad (1.99)$$

X
q
L
A
(a)
L/2 L/2
D
B
C
F
(b)
X
q
L
A
L/2 L/2
B
C
F
(c)
q
L
A
L/2 L/2
B
C
F
D
X
M
M
M

Figura 1.129: Problema 3: (a) schema reale; (b) S.I.E. che non consente di utilizzare i risultati noti; (c) S.I.E. che consente di utilizzare gli schemi noti.

La convenienza del S.I.E. così ottenuto e riportato in figura 1.129.c si evince dal fatto che con tale schema, ed utilizzando come al solito il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ricondursi alle soluzioni degli schemi noti. Ciò è mostrato nella figura 1.130 per lo schema ottenuto considerando solamente la presenza del carico distribuito.

L'equilibrio del tratto B_dC coinvolge solamente le reazioni R^{dB}_{o}, R^{dB}_{v} e R_C, che dunque sono nulle (figura 1.130.b). Passando all'equilibrio della cerniera, essendo nulle

q
L
A B C
L
B_d C
R_{Bo}^{d}
R_{Bv}^{d}
R_{Bv}^{d}
R_{Bo}^{d}
R_{Bo}^{s}
R_{Bv}^{s}
R_B
R_B
R_B
R_{Av} R_B
R_{Ao}
q
A B_s
(a)
(c)
(b)
(d)
(e)

Figura 1.130: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza del solo carico distribuito.

R^{dB}_{o} e R^{dB}_{v} si riconosce che R^{sB}_{o} deve essere nulla mentre la reazione R^{dB}_{v} deve essere uguale ed opposta a quella del carrello (figura 1.130.c-d). Passando quindi all'equilibrio del tratto AB_s si vede che lo schema statico ottenuto è proprio quello di una trave appoggiata di lunghezza L soggetta ad un carico distribuito, e che la reazione di destra,

che è verticale, è proprio quella del carrello in B.
Si conclude che, nello schema di figura 1.130.a in realtà si può ignorare la presenza della campata a destra di B e studiare dunque la trave AB come una semplice trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito, ovvero uno schema noto. La deformata della trave AB è dunque la stessa dello schema noto, mentre quella della trave BC è identicamente nulla (figura 1.131). Il valore della rotazione a sinistra di B per effetto del carico distribuito è dato dal risultato noto, mentre la rotazione a destra è nulla:

$$ {}^{q}_{Bs} = \frac{q L^3}{24EI} $$

$$ {}^{q}_{Bd} = 0 \quad (1.100) $$

Analogamente si ragiona sugli schemi delle figure 1.132-1.135.
Per lo schema con il cedimento, invece, si ottiene un sistema di spostamenti rigidi infinitesimi su ciascuna trave (figura 1.136) in quanto le caratteristiche della sollecitazione sono identicamente nulle.
Osservazione: Su una struttura isostatica, la presenza di cedimenti e/o distorsioni non induce mai caratteristiche della sollecitazione. Questo perché in presenza solamente

q
L
A B C
L
qL
2
qL
2

Figura 1.131: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza del solo carico distribuito.

L
A
L
X B C
X
L
X
L

Figura 1.132: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia X a sinistra di B.

X

L
A B C
L
X
L
X
L
Figura 1.133: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia X a destra di B.

di tali tipi di azione il sistema di forze esterne attive è nullo, e dunque un sistema di reazioni tutte nulle assicura l'equilibrio del sistema. Ma poiché per una struttura isostatica la soluzione del problema dell'equilibrio è unica, allora, questa soluzione con tutte reazioni nulle è proprio la soluzione del problema dell'equilibrio. Ma è evidente se tutte le forze attive e tutte le reazioni sono nulle allora anche le caratteristiche della sollecitazione devono necessariamente essere identicamente nulle.

L
A
L/2 L/2
B C
F
F
2
F
2
Figura 1.134: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della forza in mezzeria sul tratto di destra.

L
A B C
M
L
ML
ML
Figura 1.135: Problema 3: analisi del S.I.E. in presenza della coppia in C.

L
A B
C
Δ
L
Figura 1.136: Problema 3: spostamento rigido per effetto del cedimento .

Pertanto, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

Bs = q
Bs + XBs +
B s =
q L^3
24EI

+
X L
3EI −

L
Bd = XB
d + F
Bd + MB
d +
Bd = −
X L
3EI −
F L^2
16EI
+
ML
6EI
+

L
(1.101)
e l’equazione di congruenza (1.99) si esplicita come segue:
q L^3
24EI
+
X L
3EI −

L
= −
X L
3EI −
F L^2
16EI
+
ML
6EI
+

L
(1.102)

da cui il valore della reazione iperstatica X:
X = −
q L^2
16 −
3
32
F L +
M
4
+

3EI
L
 (1.103)
Del risultato ottenuto si vede che, in presenza solo del carico e/o della forza verticale,
il verso effettivo delle coppie X nello S.I.E. sarebbe opposto a quello ipotizzato.
Ciò significa che per effetto solamente di tali azioni le fibre tese in B sarebbero quelle
superiori, e quindi il momento flettente sarebbe negativo.
Viceversa, in presenza solo della coppia M in C e/o del cedimento , il verso ipotizzato
delle coppie X coinciderebbe con quello effettivo e dunque il corrispondente momento flettente in B sarebbe positivo.
In presenza di tutte le azioni il segno della X e dunque del momento flettente dipende
dal loro valore.

1.10.4 Problema 4

La trave in figura 1.137.a è tre volte iperstatica. Pertanto sarà necessario eliminare tre
vincoli semplici e scrivere un sistema di tre equazioni di congruenza per risolvere la
struttura. Si mostrerà però che tale sistema si disaccoppia in due sistemi, uno costituito
da una sola equazione e legato al solo comportamento flessionale, ed un secondo di due
equazioni e legato al solo comportamento estensionale.
X_1
q
L
A
(a)
B C
(b)
L
A B C X_3
L
L
q
X_2
Figura 1.137: Problema 4: (a) sistema reale; (b) S.I.E.
Un S.I.E. equivalente che consente di utilizzare gli schemi noti è quello mostrato in
figura 1.137.b. Le equazioni di conguenza sono:
${}_{Bs} = {}_{Bd}$ $w_B = 0$ $w_C = 0$ (1.104)

Operando come al solito per sovrapposizione degli effetti si considerano dapprima gli
schemi in cui si applicano solamente la X_2 o la X_3, mostrati nelle figure 1.138 e 1.139.
Si vede facilmente che si ottiene:
8>
><>>:

$$w^{X_2}_B = w^{X_2}_C = \frac{X_2 L}{EA} \qquad w^{X_3}_B = \frac{X_3 L}{EA} \qquad w^{X_3}_C = \frac{X_3 2L}{EA} \tag{1.105}$$

I risultati possono ottenersi direttamente per integrazione dell'equazione differenziale, o anche sfruttando con opportuni ragionamenti lo schema noto di figura 1.123. Nel primo schema di figura 1.138 solamente la trave AB è soggetta allo sforzo normale costante pari a X_2 mentre la trave BC segue rigidamente per cui $w^{X_2}_B = w^{X_2}_C$. Nel secondo schema di figura 1.139 lo sforzo normale costante X_3 interessa tutta la trave AC, che è lunga 2L.

L
A
B
C
L
X_2
$N = X_2$
w_B
$w_C = w_B$

Figura 1.138: Problema 4: schema con la X_2.

L
A
B C
X_3
L
$N = X_3$
w_C
w_B

Figura 1.139: Problema 4: schema con la X_3.

Negli schemi delle figure 1.138 e 1.139 si ha solo sforzo normale. Il momento flettente è identicamente nullo e non si ha dunque deformazione flessionale. Le rotazioni a destra e sinistra di B sono dunque nulle in tali schemi. Si vede facilmente che

esse dipendono
solamente dal carico q e dall'incognita iperstatica X_1, e che invece per effetto di queste due azioni lo sforzo normale è identidamente nullo e gli spostamenti
w_B e w_C
sono entrambi nulli. Si ha in particolare:

X_2

$_{Bs} = X_3$

$_{Bs} = X_2$

$_{Bd} = X_3$

$_{Bd} = 0 \ w^{X_1}$

$_B = w^{X_1}$

$_C = w^q$

$_B = w^q$

$_C = 0$ (1.106)

X_1

$_{Bs} =$

$X_1 L$

$3EI$

X_1

$_{Bd} = -$

$X_1 L$

$3EI$

q

$_{Bs} =$

$q L^3$

$24EI$

q

$_{Bd} = -$

$q L^3$

$24EI$

(1.107)

Sostituendo i risultati ottenuti nelle equazioni di congruenza (1.104) si ottiene:

8>

>>>><>>>>>:

2

3

$X_1 L$

EI

$= -$

$q L^3$

$12EI$

$X_2 L$

EA

$+$

$X_3 L$

EA

$= 0$

$X_2 L$

EA

$+$

$X_3 2L$

EA
$$= 0 \tag{1.108}$$

che in forma matriciale si riscrive:

$$\begin{bmatrix} \frac{2L^3}{3EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{EA} & \frac{L}{EA} \\ 0 & \frac{L}{EA} & \frac{2L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q\,L^3}{12EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.109}$$

Chiaramente la prima equazione è disaccoppiata dal sistema della seconda e della terza. E' immediato vedere che la soluzione di queste ultime due è quella banale $X_2 = X_3 = 0$, mentre la prima fornisce:

$$X_1 = -\frac{q\,L^2}{8} \tag{1.110}$$

Si capisce dunque il motivo per cui lo schema di figura 1.137.a viene spesso direttamente visto come un sistema solamente 1 volta iperstatico. Le altre due iperstaticità infatti sono banali da risolvere. Esse infatti riguardano il comportamento estensionale della trave e non essendoci forze orizzontali né distorsioni uniformi non conducono a sollecitazioni aggiuntive. Inoltre, se anche tali azioni orizzontali fossero

presenti, esse si studierebbero risolvendo un problema disaccoppiato rispetto a quello flessionale. In altre parole, quando si dice che il problema 4 è una volta iperstatico si suole sottointendere che il problema flessionale è una volta iperstatico.
E’ importante sottolineare che, anche se il S.I.E. scelto per risolver il problema 4 non è l’unico possibile, qualsiasi altro avrebbe comportato la presenza di una incognita iperstatica legata al solo problema flessionale, e due incognite iperstatiche legate solamente al problema estensionale. La verifica di quest’ultima affermazione la si lascia come utile esercizio.

1.10.5 Problema 5

Alcuni risultati ottenuti per le strutture iperstatiche studiate nei problemi 1-4 sembrerebbero contraddire, in apparenza, il fatto che su una struttura iperstatica è necessario

tenere conto della deformabilità della struttura per calcolare le reazioni vincolari e determinare le caratteristiche della sollecitazione sulla struttura. Eppure, il valore delle reazioni iperstatiche ottenuto per effetto di un carico q, di una forza F o di un momento M, sembrerebbero a prima vista independenti dalle caratteristiche di deformabilità, o equivalentemente di rigidezza, in quanto ciacuno dei valori trovati finora non dipende da EI.
Viceversa, la rigidezza EI, o quella EA nel successivo problema 6, influiscono sui valori delle reazioni iperstatiche in presenza di cedimenti è distorsioni.
Nel problema 5 si vuole mostrare che in una struttura iperstatica, in presenza di carichi, forze e coppie, la deformabilità della struttura influisce sul valore delle reazioni e delle caratteristiche della sollecitazione non tanto attraverso il suo valore assoluto, ma attraverso la sua distribuzione e la sua eventuale variazione sulla struttura, restando inteso però che il valore assoluto della deformabilità deve essere sufficientemente piccolo affinché sia valida l’ipotesi di piccoli spostamenti.
In altre parole negli schemi studiati in precedenza la deformabilità finisce per non influire sulle sollecitazioni indotte da carichi, forze e coppie, solamente perché essa è costante su tutta la struttura. Anche in tali casi, tuttavia, essa ovviamente influisce sull’entità delle deformazioni.
Nel problema 5 si vuole capire meglio tale aspetto del problema studiando lo schema

1 volta iperstatico di figura 1.140, in cui si assume che le rigidezze flessionali dei tratti AB e BC siano diverse e pari rispettivamente a $(EI)_1$ ed $(EI)_2$.

X
q
L
A
(a)
B C
(b)
L
A X B C
L
L
q
$(EI)_1$ $(EI)_2$
$(EI)_1$ $(EI)_2$

Figura 1.140: Problema 5: (a) sistema reale; (b) S.I.E.

Introducendo il S.I.E. 1.140.b e si ottiene l'equazione di conguenza:

$$\frac{q\,L^3}{24\,(EI)_1} + \frac{X\,L}{3\,(EI)_1} = -\frac{X\,L}{3\,(EI)_2} \qquad (1.111)$$

che risolta fornisce:

$$X = -\frac{q\,L^2}{8}\left(\frac{\frac{1}{(EI)_1}}{\frac{1}{(EI)_1}+\frac{1}{(EI)_2}}\right) \qquad (1.112)$$

Introducendo il seguente parametro :

$$= \frac{(EI)_1}{(EI)_2} \qquad (1.113)$$

la (1.112) si riscrive:

$$X = -\frac{q\,L^2}{}$$

8 (1 +)
(1.114)

Quando tende a zero, la rigidezza $(EI)_2$ tende ad essere molto più grande di quella $(EI)_1$, e la presenza del tratto BC determina per quello AB un vincolo che tende ad essere un incastro (figura 1.141). Infatti in tal caso il momento flettente in B tende al valore di q $L^2/8$ ottenuto all'incastro per la trave appoggiata in un estremo ed incastrata nell'altro soggetta ad un carico distribuito (problema 1).

Quando tende all'infinito, la rigidezza $(EI)_2$ tende ad essere trascurabile rispetto a quella $(EI)_1$ per cui il tratto AB tende a non accorgersi della presenza del tratto adiacente BC (figura 1.142). Di conseguenza in tal caso il momento flettente in B tende al valore nullo che si avrebbe se il tratto BC non ci fosse ed il tratto AB fosse dunque una semplice trave appoggiata.

q
L
A B C
L
$(EI)_1$ $(EI)_2 >> (EI)_1$

Figura 1.141: Problema 5: caso $(EI)_2 >> (EI)_1$.

q
L
A B C
L
$(EI)_1 >> (EI)_2$ $(EI)_2$

Figura 1.142: Problema 5: caso $(EI)_1 >> (EI)_2$.

1.10.6 Problema 6

Il problema 6 è di semplice soluzione. L'equazione di congruenza in B si scrive:

X L
EA
+ tL = 0 (1.115)

e fornisce:

X = −EA t (1.116)

Si nota in particolare che lo sforzo normale nella trave, pari a X, non dipende dalla lunghezza L.

X
(a) (b)
L
A Δt B
L
A Δt B

Figura 1.143: Problema 6.

1.10.7 Problema 7: composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti

q
L
A
(a)
B C
(b)
L
q
L
A
B C
L
q
X
Figura 1.144: Problema 7: (a) schema reale; (b) S.I.E.

Il problema 7 mostrato in figura 1.144.a non può risolversi sovrapponendo semplicemente i risultati degli schemi noti ed è dunque necessario fare delle considerazioni

ulteriori. Conviene utilizzare il S.I.E. di figura 1.144.b e decomporre il carico nelle sue due parti agenti sui tratti AB e BC, che verranno indicate con q_s e q_d.
Così facendo, in presenza solo della coppia coppia X, o solo del carico q_s, il tratto BC risulta scarico e, nella deformazione dell'intera trave, è caratterizzato da uno spostamento rigido infintesimo che 'segue' la rotazione in B del tratto AB. Quest'ultimo è caratterizzato da reazioni vincolari, diagrammi delle caratteristiche e configurazione deformata in tutto uguali a quelli che si avrebbero in assenza del tratto BC. Pertanto in questo caso si possono semplicemente utilizzare i risultati degli schemi noti di trave appoggiata soggetta ad un carico distribuito o ad una coppia all'estremità. Si ottiene così (figure 1.145 e 1.146):

q_s
$_A = -$
$q\,L^3$
24EI
XA
=
X L
3EI
(1.117)

qL
2 L
A
B
C
L

qL
2
vC
Tratto scarico: caratteristiche
della sollecitazione nulle e
dunque spostamento rigido
Figura 1.145: Problema 7: uso dello schema noto di trave appoggiata con carico distribuito.
L
A
B C
L
X
X
L
X
L
vC
Tratto scarico: caratteristiche
della sollecitazione nulle e
dunque spostamento rigido
Figura 1.146: Problema 7: uso dello schema noto di trave appoggiata con coppia di
estremità.
Un metodo efficace per valutare la rotazione in A dovuta al carico a destra q_d (schema
di figura 1.147) consiste nel ricavare la deformata della trave componendo più schemi.

L
A
B C
L
q
qL
2
qL
2
3
qL
2
2
Figura 1.147: Problema 7: reazioni e diagramma del momento per il carico sullo sbalzo.
L
A
B C
L
q
L
A
B C
L
q
qL
qL
2
2
L

A
B
C
L
q
qL
qL
2
2
L
A
B
C
L
qL
2
2
L
A
B C
L
qL

+

= =

= +

+

Schema 1 Schema 2
Schema 3
$R_B=$
qL
2
Reazioni
nulle
$R_B=$ qL
$R_A=$
qL
2
Deformata nulla
v_C
(1)
v_C
(2)
Schema B
Schema A
(iniziale)

Figura 1.148: Problema 7: composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti.

Tale metodo è anche noto come ‘metodo della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti’.

Un primo modo per illustrare tale metodo parte dall’osservazione che lo schema in esame, ovvero lo ‘Schema A’ di figura 1.148, è del tutto equivalente allo ‘Schema B’ della stessa figura, ottenuto aggiungendo in B due forze uguali ed opposte pari a q L e due coppie uguali ed opposte pari a $q L^2/2$. Infatti così facendo si sono aggiunte

globamente in B una forza verticale ed una coppia entrambe nulle.

Tuttavia è ora possibile riguardare lo schema B come sovrapposizione dei tre schemi 1, 2 e 3 di figura 1.148.

Risolvendo lo schema 1 si trova che tutte le reazioni vincolari esterne sono nulle e che il tratto AB è dunque scarico. Pertanto, date le condizioni al contorno di spostamento verticale nullo sia in A che in B, nello schema 1 la deformata del tratto AB è identicamente nulla mentre quella del tratto BC è uguale a quella di una mensola soggetta ad un carico distribuito, che è uno schema noto. In tale schema è dunque pari a zero la rotazione in A

$$_A^{(1)} = 0, \quad (1.118)$$

che interessa in particolare per la scrittura dell’equazione di congruenza. Volendo conoscere lo spostamento verticale e la rotazione in C, essi si ricavano dallo schema noto della mensola e valgono:

$$v_C^{(1)} = \frac{q L^4}{8EI} \qquad _C^{(1)} = -\frac{q L^3}{6EI} \quad (1.119)$$

L’apice (1) indica che tali valori sono quelli ottenuti sullo schema 1.

Nello schema 2 il tratto BC risulta scarico e nella deformazione dell’intera trave, analogamente a quanto visto per gli schemi nelle figure 1.145 e 1.146, esso è caratterizzato da uno spostamento rigido infintesimo che ‘segue’ la rotazione in B del tratto AB. Quest’ultimo è caratterizzata da reazioni vincolari, diagrammi delle caratteristiche e configurazione deformata in tutto uguali a quelli che si avrebbero in assenza del tratto BC. Pertanto in questo caso si possono semplicemente utilizzare i risultati dello schema noto di trave appoggiata soggetta ad una coppia all’estremità pari a $q L^2/2$.

Si ottiene per la rotazione in A, essendo A l’estremo opposto a quello in cui agisce la coppia $q L^2/2$:

$$_A^{(2)} = \frac{q L^2}{2} \frac{L}{6EI} = \frac{q L^3}{12EI} \quad (1.120)$$

Volendo conoscere lo spostamento verticale e la rotazione in C essi si determinano considerando che, nota la rotazione di B, che è data da:

(2)
$_B = -q L^2$
2 L
3EI
$= -$
$q L^3$
6EI
(1.121)
la rotazione rigida del tratto BC che, come detto, segue la rotazione in B, fornisce:
(2)
$_C = {}^{(2)}$
$_B = -$
$q L^3$
6EI
$v^{(2)}$
$_C = -^{(2)}$
$_C L =$
$q L^4$
6EI
(1.122)
Nello schema 3 è immediato vedere che tutta la forza q L viene assorbita dal vincolo,
che reagisce dunque con una reazione uguale e contraria verso l’alto, mentre la reazione
in A è nulla. L’intera trave AC è dunque scarica e, in virtù delle condizioni al contorno,
la deformata è identicamente nulla.
Pertanto, la rotazione in A per effetto del carico a destra è data da:
$_A = {}^{(1)}$
$_A + {}^{(2)}$
$_A = 0 +$
$q L^3$
12EI
$=$
$q L^3$
12EI
(1.123)

Questo valore è quello che serve per la scrittura dell’equazione di congruenza in A.
Lo spostamento verticale e la rotazione in C sono dati da:
$v_C = v^{(1)}$
$_C + v^{(2)}$
$_C =$
$q L^4$
8EI
$+$
$q L^4$
6EI
$=$
$7 q L^4$

24EI
C = (1)
C + (2)
C = −
q L^3
6EI −
q L^3
6EI
= −
q L^3
3EI
(1.124)
Un secondo modo per illustrare il metodo della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti è basato sull'idea di suddividere la struttura in più tratti e di decomporre il processo che conduce la struttura nella sua configurazione deformata nella successione di più processi di deformazione. In ognuno di questi le deformazioni della struttura si assumono nulle ovunque tranne che per un tratto, immaginando quindi di avere solo quel stratto deformabile e tutto il resto della struttura invece rigido.
Nel caso in esame tale metodo conduce ad immaginare dapprima il tratto AB infinitamente rigido (EI = +1), ed il tratto BC caratterizzato dalla sua effettiva rigidezza (figura 1.149.a), e successivamente il tratto AB deformabile ed il tratto BC infinitamente rigido (figura 1.149.b).
Nello schema di figura 1.149.a il diagramma del momento induce una curvatura solamente nel tratto BC, mentre quello AB, per le condizioni al contorno, ha spostamenti identicamente nulli.
Gli spostamenti del tratto BC sono quelli di una mensola perché l'ipotesi di infinita rigidezza flessionale del tratto AB fornisce per il tratto BC una condizione di vincolo pari all'incastro.
Nello schema di figura 1.149.b, invece, il diagramma del momento induce una curvatura solamente nel tratto AB, mentre quello BC è caratterizzato da uno spostamento rigido infinitesimo, determinato dalla rotazione in B. In particolare, sul tratto AB le caratteristiche e la deformata sono quelli dovuti dalla coppia oraria q L^2/2 trasmessa in B.

1.10.8 Problema 8

Nel problema di figura 1.150 la coppiaMesterna è applicata in B.
Scegliendo come al solito di inserire una cerniera in B, nasce il problema di dove applicare la coppia M. Infatti, sul sistema reale, non è necessario specificare se la

coppia agisce a destra o a sinistra, perché in B vi è continuità nella rotazione. Pertanto
nel problema reale è corretto dire semplicemente che la coppia agisce in B.
Nel S.I.E., però, essendo presente una cerniera sembrerebbe diverso mettere la coppia
a destra o a sinistra. In effetti, dalle due scelte scaturiscono valori diversi della X.
Ma il paradosso si spiega immediatamente vedendo che, con tali valori diversi della X,
la soluzione finale rimane inalterata.
Si consideri prima il caso in cui la coppia viene applicata a sinistra (figura 1.151.a).
Sommando algebricamente la coppia M e la X a sinistra di B si ottiene lo schema di
figura 1.151.b. Scrivendo l'equazione di congruenza $_{Bs} = {}_{Bd}$ si vede facilmente che
si ottiene

$$X = -M/2 \quad (1.125)$$

L
A
B C
L
q
qL
2
qL
2
3
L
A
B
C
L
q
qL
2
qL
2
3
L
A
B
C
L
q
qL
2
qL
2
3
EI=
VC
(2)
VC
(1)
VC
(1)
VC
(2)
EI=
=
+
(a) (b)

Figura 1.149: Problema 7: interpretazione fisica della composizione cinematica delle rotazioni e degli spostamenti.

da cui si determina il diagramma del momento riportato in figura 1.152 sullo schema reale, dove si riscontra il salto pari aMin B come era da aspettarsi.

Ma la scelta di applicare la coppia M a sinistra della cerniera in B non è l’unica possibile. Infatti si può scegliere di mettere la coppia M a destra della cerniera in B (figura 1.153) o per metà a destra e per metà a sinistra (figura 1.154). O si può più in generale pensare di applicare una coppia a destra ed una a sinistra in modo tale che la loro somma diaM.

Il valore dell’incognita iperstatica dipende dalla scelta fatta, e si lascia come esercizio la verifica che nel caso del S.I.E. di figura 1.153 si ottiene X = M/2 mentre per quello di figura 1.154 si ricava X = 0. In ogni caso però il diagramma del momento finale e quindi la deformata e tutta la soluzione non cambiano e sono quelli riportati nella figura 1.152.

L
A
B
C
L
M

Figura 1.150: Problema 8.

X
(a)
L
A B C
X
L
M
X+M X
(b)
L
A B C
L

Figura 1.151: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppiaMa sinistra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamenteMe X a sinistra.

M2
L
A
B
C
L
M2
deformata
M

Figura 1.152: Problema 8: diagramma del momento ottenuto e riportato sullo

schema
reale.

X
(a)
L
A B C
X
L
M
X−
(b)
L
A B C
X
L
M

Figura 1.153: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppiaMa destra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamente laMe X a destra.

X
(a)
L
A B C
X
L
X−
(b)
L
A B C
X+
L
M2
M2
M2
M2

Figura 1.154: Problema 8: (a) S.I.E. in cui si è scelto di fare agire la coppia M per metà a destra e per metà a sinistra della cerniera; (b) come (a) ma avendo sommato algebricamente le coppieM/2 e X.

1.11 Esercizi proposti

Gli esercizi 1-10 riguardano travi ad asse rettilineo una volta iperstatiche. In essi si richiede di scegliere nel modo più opportuno un sistema isostatico equivalente e di determinare il valore dell’incognita iperstatica.

q
L L/2 L/2
D
F M
a
M

Esercizio 1.

q

L
g
1
F M
L_2
Esercizio 2.
q
L
g
1
F
M
L_2 L_2
D
Esercizio 3.

q
L
D
F M
a
M
D M
a L
Esercizio 4.
q
L L/2 L/2
D
F
a
M
D M
Esercizio 5.
q
L_1
F M
L_2
D
Esercizio 6.
q
L_1
M F
$L_2/2$
D
$L_2/2$
Esercizio 7.

q
L
D
F M
a

M D M
L/2 L/2
Esercizio 8.
q
L/2 L/2 L
D
F M
a
M
F
Esercizio 9.
q
L_1
F M
L $_2$
D D
Esercizio 10.

Capitolo 2

ELEMENTI DI MECCANICA DEL CONTINUO

2.1 Richiami di algebra ed analisi vettoriale

2.1.1 Spazi vettoriali e funzioni lineari

Un insieme U è detto uno ‘spazio vettoriale’ sul campo reale ed i suoi elementi sono
detti vettori quando sono definite le operazioni di somma tra due vettori di U e di moltiplicazione
di un vettore di U per uno scalare, ed il risultato di tali operazioni è sempre
un vettore di U, cioè si ha:

u_1 2 U, u_2 2 U) u_1 + u_2 2 U (somma tra vettori)
u 2 U, 2 <) u 2 U
(moltiplicazione di un vettore
per uno scalare)
(2.1)

e quando la somma tra vettori gode delle seguenti proprietà valide per ogni u, u_1, u_2, u_3 2
U:

associatività u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + u_2 + u_3
commutatività u_1 + u_2 = u_2 + u_1
9 l’elemento 0
(vettore nullo) tale che: u + 0 = 0 + u = u
(2.2)

mentre la moltiplicazione di un vettore per uno scalare gode delle seguenti altre proprietà,
valide per ogni , $_1$, $_2$ 2 < ed u, u_1, u_2 2 U:

distributività
($_1$ + $_2$) u = $_1$ u + $_2$ u
 (u_1 + u_2) = u_1 + u_2

associatività ($_1$ $_2$) u = $_1$ ($_2$ u) = $_1$ $_2$ u
(2.3)
Nel seguito si sottointenderà che il campo vettoriale si definisce sul campo reale.

2.1.2 Vettori linearmente indipendenti

I vettori di un insieme $\{u_1, u_2 \dots, u_m\}$ sono detti linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che fornisce il vettore nullo è quella banale, cioè con tutti i coefficienti pari a zero, ovvero quando si ha:

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m = 0$) $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ (2.4)

2.1.3 Funzioni lineari

Una funzione (o anche 'operatore', o 'trasformazione') A : U ! V che associa ai vettori di uno spazio vettoriale U quelli di un altro spazio vettoriale V si dice lineare se vale la relazione:

A($_1$ u_1 + $_2$ u_2) = $_1$A(u_1) + $_2$A(u_2) 8u_1, u_2 2 U 8$_1$, $_2$ 2 < (2.5)

Per un operatore lineare si usa spesso (quando la necessità di chiarezza non richieda diversamente) non indicare l'argomento in parentesi, ponendosi dunque: S(u) = S u.

2.1.4 Spazi di dimensione finita e basi

Uno spazio vettoriale U si dice di dimensione finita n, e si indicherà qui con U_n, quando il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di U è n. Un insieme di n vettori linearmente indipendenti, $\{e_1, e_2 \dots, e_n\}$, è detto allora una base di U, e può dimostrarsi facilmente che un qualsiasi vettore di U può ottenersi in un unico modo come combinazione lineare di $\{e_1, e_2 \dots, e_n\}$. Pertanto si ha[1]:

8u 2 U_n 9| $u_1, u_2, \dots, u_n$ 2 < : $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n$
(2.6)

Esistono infinite basi di uno spazio vettoriale di dimensione finita n ma tutte le basi hanno lo stesso numero n di vettori. Gli scalari u_i, i =, 1, . . . , n, sono detti le componenti di u rispetto alla base $\{e_1, e_2 \dots, e_n\}$. Nel seguito, a seconda delle necessità, si utilizzeranno equivalentemente le seguenti notazioni:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i = u_i e_i \quad (2.7)$$

l'ultima delle quali è nota come convenzione dell'indice ripetuto. Essa sottointende l'operazione di sommatoria sull'indice ripetuto due volte all'interno della stessa relazione e viene spesso utilizzata quando sia chiaro che la sommatoria va svolta per i che va da 1 a n. Analogamente, quando è chiara dal contesto la dimensione dello spazio, una base $\{e_1, e_2 \dots, e_n\}$ si indicherà semplicemente con $\{e_i\}$.

[1]Il simbolo 9| indica che tale combinazione lineare esiste ed è unica.

2.1.5 Lo spazio Euclideo tridimensionale

Lo spazio tridimensionale che ci circonda è efficacemente schematizzato come uno spazio vettoriale, che si indicherà con U. Un vettore di tale spazio è individuato da un segmento orientato, e quindi dal suo modulo (ovvero la lunghezza del segmento), dalla sua direzione e dal suo verso.

In generale, i vettori di tale spazio vengono considerati quali ‘vettori liberi’, nel senso che segmenti diversi ma aventi modulo, direzione e verso uguali, si dicono ‘equipollenti’ ed identificano lo stesso vettore.

u

v

u

v

u + **v**

u

u α

$\alpha > 1$

(a) (b)

Figura 2.1: Operazioni nello spazio euclideo tridimensionale (o bidimensionale): (a) somma di due vettori; (b) moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

In alcuni casi conviene considerare i vettori come vettori applicati, per cui due vettori equipollenti ma aventi estremi iniziale e finale diversi identificano due vettori applicati diversi. Conviene però qui assumere i vettori quali vettori liberi, poiché un vettore applicato può semplicemente caratterizzarsi mediante l’associazione del vettore stesso, considerato quale vettore libero, e del punto di applicazione.

L’insieme di tutti i segmenti orientati assume struttura di uno spazio vettoriale quando si introduce l’operazione di somma di due vettori, mediante la ben nota regola del parallelogramma, e della moltiplicazione di uno scalare per un vettore u (fgura 2.1).

Il modulo di un vettore u è anche detto ‘norma’ di u e viene indicato con kuk.

Dati due vettori u e v, sia uˆv il minore degli angoli da essi formati. Si definisce prodotto scalare, e si indica con u · v, il numero reale:

u · v = kukkvkcos uˆv (2.8)

Il prodotto scalare è dunque una funzione che associa ad ogni coppia di vettori u_1 e u_2 di U un numero reale che si indica con $u_1 \cdot u_2$. Tale funzione gode delle seguenti proprietà:

è definita positiva u · u > 0 8u 6= 0
è simmetrica $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$
è bilineare 8<:
$u \cdot ({}_1 u_1 + {}_2 u_2) = {}_1 (u \cdot u_1) + {}_2 (u \cdot u_2)$
$({}_1 u_1 + {}_2 u_2) \cdot u = {}_1 (u_1 \cdot u) + {}_2 (u_2 \cdot u)$
(2.9)

comunque scelti u, u_1, u_2 2 U e ${}_1$, ${}_2$ 2 <.
Una funzione definita su U ed a valori reali è anche detta una ‘forma’, e quindi in virtù delle (2.9) si dice anche che il prodotto scalare è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva. Uno spazio vettoriale di dimensione finita in cui è definita una forma bilineare, simmetrica e definita positiva è anche detto uno spazio Euclideo.
Nel seguito ci si riferirà esplicitamente al caso dello spazio euclideo tridimensionale, che è ovviamente di estrema importanza nella meccanica in quanto consente di schematizzare matematicamente lo spazio tridimensionale che ci circonda. Tutto quanto si dirà può essere facilmente specializzato al caso dello spazio bidimensionale, che rappresenta un sottospazio di quello tridimensionale.

2.1.6 Basi ortonormali

Una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U si dice ortonormale quando i suoi vettori sono di modulo unitario e sono a due a due ortogonali fra loro, ovvero quando risulta:
$e_i \cdot e_j = {}_{ij}$ (2.10)
dove ${}_{ij}$ indica il simbolo di Kronecker, definito da[2]:
${}_{ij}$ =8<:
1 se i = j
0 se i 6= j
(2.11)
In uno spazio vettoriale euclideo in cui si sceglie una base ortonormale valgono alcune importanti proprietà.
Una prima riguarda la possibilità di ottenere le componenti di un vettore rispetto alla base ortonormale come prodotto scalare del vettore stesso per i vettori della base. In particolare la componente i-esima di un vettore u si ottiene come prodotto scalare tra u e e_i, ovvero $u_i = u \cdot e_i$. Infatti si ha[3]:
$u \cdot e_i = (u_j e_j) \cdot e_i = u_j (e_j \cdot e_i) = {}_{ij} u_j = u_i$ (2.12)
E’ utile come esercizio particolarizzare la relazione precedente per calcolare, ad esempio, la prima componente del generico vettore u. La relazione (2.12) si scrive per esteso come segue:
$u \cdot e_1 = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \cdot e_1 = u_1 e_1 \cdot e_1 + u_2 e_2 \cdot e_1 + u_3 e_3 \cdot e_1 =$
$= u_1 (e_1 \cdot e_1) + u_2 (e_2 \cdot e_1) + u_3 (e_3 \cdot e_1) = u_1$
(2.13)

[2]In altre parole, $_{ij}$ rappresenta la componente ij della matrice identica:
I =266664
1 0 0
0 1 0
0 0 1
377775
[3]Si noti che non si può sostituire $u = u_i e_i$ nella relazione (2.12) in quanto l'indice i è stato già utilizzato. Si potrebbe invece sostituire l'indice j con qualsiasi altro indice, poiché su di esso si svolge la
sommatoria. Si suole indicare ciò anche dicendo che l'indice j è un indice 'muto'.

in quanto $e_1 \cdot e_1 = 1$, mentre $e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_1 = 0$.
In figura 2.2 si da una interpretazione geometrica di quanto detto per un vettore
del piano, ovvero di uno spazio euclideo bidimensionale. Essendo la base ortonormale,
le componenti del vettore u in figura si ottengono come proiezioni ortogonali del
vettore stesso sui vettori della base. Per la componente 1, ad esempio, si ha che $u_1 =$
kuk cos $u\hat{\ }e_1$. Essendo ke_1k = 1, si ottiene in definitiva: u_1 = kuk ke_1k cos $u\hat{\ }e_1 = u \cdot e_1$.
e1
u
e2
u1
u2
ue1
ue2
Figura 2.2: Componenti del vettore del piano u rispetto alla base ortonormale $\{e_1, e_2\}$.
Rispetto ad una base ortonormale, il prodotto scalare tra due vettori u e v si ottiene
come somma dei prodotti delle componenti omologhe di u e v. Infatti si ha[4]:
$u \cdot v = (u_j e_j) \cdot (v_i e_i) = (e_j \cdot e_i) u_j v_i = {}_{ij} u_j v_i = u_i v_i$ (2.14)
La relazione precedente si può anche scrivere:
$u \cdot v$ = 26664
u_1
u_2
u_3
37775
·
26664
v_1
v_2
v_3
37775
$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ (2.15)
2.1.7 Tensori e matrice associate ad un tensore
In seguito si considereranno sempre funzioni lineari che trasformano vettori di U in altri

vettori ancora di U, ovvero funzioni A : U ! U. Una funzione di tale tipo è detta un
tensore.

[4]Svolgendo per esteso i passaggi si ha
$u \cdot v = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \cdot (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) =$
$= e_1 \cdot e_1 u_1 v_1 + e_2 \cdot e_1 u_2 v_1 + e_3 \cdot e_1 u_3 v_1 + e_1 \cdot e_2 u_1 v_2 + e_2 \cdot e_2 u_2 v_2 + e_3 \cdot e_2 u_3 v_2 +$
$+ e_1 \cdot e_3 u_1 v_3 + e_2 \cdot e_3 u_2 v_3 + e_3 \cdot e_3 u_3 v_3 =$
$= e_1 \cdot e_1 u_1 v_1 + e_2 \cdot e_2 u_2 v_2 + e_3 \cdot e_3 u_3 v_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Sia u un vettore di U e v 2 U il suo trasformato tramite il tensore A. Si ha dunque:

$v = Au$ (2.16)

Assegnata una base ortonormale $\{e_i\}$, si ha:

$v_i = v \cdot e_i = (Au) \cdot e_i = Au \cdot e_i$ (2.17)

dove le parentesi si sono eliminate in quanto, affinché si possa avere uno scalare come
risultato dell'operazione $Au \cdot e_i$, bisogna necessariamente calcolare prima Au e poi
moltiplicare scalarmente il vettore ottenuto per e_i. Esprimendo u in termini di componenti
rispetto ad $\{e_i\}$, ovvero ponendo $u = u_j e_j$, e sfruttando la linearità di A, si ha[5]:

$v_i = A(u_j e_j) \cdot e_i = (Ae_j \cdot e_i) u_j$ (2.18)

La matrice A la cui componente A_{ij} è data da:

$A_{ij} = Ae_j \cdot e_i$ (2.19)

è detta matrice associata al tensoreArispetto alla base $\{e_i\}$. Infatti sostituendo la (2.19)
nella (2.18) si ha:

$v_i = A_{ij} u_j$ (2.20)

In forma matriciale, la (2.20) diventa:

26664
v_1
v_2
v_3
37775
=26664
$Ae_1 \cdot e_1$ $Ae_2 \cdot e_1$ $Ae_3 \cdot e_1$
$Ae_1 \cdot e_2$ $Ae_2 \cdot e_2$ $Ae_3 \cdot e_2$
$Ae_1 \cdot e_3$ $Ae_2 \cdot e_3$ $Ae_3 \cdot e_3$
37775 26664
u_1
u_2
u_3
37775
(2.21)

Pertanto, assegnata una base ortonormale, il vettore delle componenti di v, trasformato
tramite il tensore A del vettore u, si ottiene effettuando il prodotto righe per colonne
della matrice associata adAper il vettore delle componenti di u rispetto alla stessa base.
Tale matrice, con un consapevole abuso di notazione volto a semplificare il

formalismo,
verrà indicata anch'essa con A.
Dalla (2.21) si vede anche che gli elementi della prima colonna della matrice associata
al tensore A rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono le componenti del vettore Ae_1 rispetto alla base stessa. Analogamente gli elementi della seconda colonna sono le componenti
del vettore Ae_2 mentre gli elementi della terza colonna sono le componenti del vettore Ae_3. In generale, gli elementi della colonna j-esima sono le componenti del
vettore Ae_j, ovvero del trasformato tramite A del vettore e_j. L'elemento A_{ij} è allora
la i-esima componente del vettore Ae_j.

[5]Per esteso, nel caso i = 1, si ha
$v_1 = A(u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \cdot e_1 = (Ae_1 \cdot e_1)\, u_1 + (Ae_2 \cdot e_1)\, u_2 + (Ae_3 \cdot e_1)\, u_3$

2.1.8 Prodotto fra tensori

La composizione di due tensori A e B, detta anche prodotto di A per B, è a sua volta
un tensore definito dalla relazione:
$(AB)\, u = A(Bu)$ 8 u (2.22)
Il prodotto di tue tensori gode della proprietà associativa, per cui (AB)C = A(BC) =
ABC, ma non di quella commutativa, poiché in generale AB 6= BA. Se si ha invece
che AB = BA si dice che i due tensori A e B commutano.
La matrice associata al prodotto AB rispetto ad una base ortonormale si ottiene mediante il prodotto righe per colonne delle matrici associate ad A ed a B rispetto alla
stessa base. Infatti si ha:
$(ABa)_i = (AB)_{ij}\, a_j$ 8 a 2 U (2.23)
ed inoltre:
$(ABa)_i = A_{ik}\, (Ba)_k = A_{ik}\, (B_{kj}\, a_j) = (A_{ik}\, B_{kj})\, a_j$ 8 a 2 U (2.24)
da cui:
$(AB)_{ij} = A_{ik}\, B_{kj}$ (2.25)
L'ultima relazione rappresenta appunto, in forma indiciale, il prodotto righe per colonne.
Infatti, l'elemento ij della matrice AB, si ottiene come somma dei prodotti delle componenti omologhe della riga i-esima di A e della colonna j-esima di B[6].
Per esteso, per n = 3, si ha:
AB=26664
$A_{11}\ A_{12}\ A_{13}$
$A_{21}\ A_{22}\ A_{23}$
$A_{31}\ A_{32}\ A_{33}$
37775
26664
$B_{11}\ B_{12}\ B_{13}$
$B_{21}\ B_{22}\ B_{23}$
$B_{31}\ B_{32}\ B_{33}$
37775
=
=24

$A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31}$ $A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32}$ $A_{11} B_{13} + A_{12} B_{23} + A_{13} B_{33}$
$A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} + A_{23} B_{31}$ $A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{32}$ $A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23} + A_{23} B_{33}$
$A_{31} B_{11} + A_{32} B_{21} + A_{33} B_{31}$ $A_{31} B_{12} + A_{32} B_{22} + A_{33} B_{32}$ $A_{31} B_{13} + A_{32} B_{23} + A_{33} B_{33}$
35
(2.26)

2.1.9 Prodotto tensoriale

Assegnati due vettori a e b di U, si definisce prodotto tensoriale di a per b, e si indica
con a b, il tensore definito dalla seguente relazione:
(a b) c
def.
= a (b · c) 8 c 2 U (2.27)

6Al variare di k, gli elementi A_{ik} sono proprio gli elementi della riga i-esima diA, mentre gli elementi
B_{kj} sono proprio gli elementi della colonna j-esima di B

In componenti si ha:
$[(a\ b) c]_i = (a\ b)_{ij} c_j$ 8 c 2 U (2.28)
ed inoltre, dalla definizione (2.27):
$[(a\ b) c]_i = [a (b \cdot c)]_i = a_i (b \cdot c) = a_i (b_j c_j) = (a_i b_j) c_j$ 8 c 2 U (2.29)
da cui si ricava:
$(a\ b)_{ij} = a_i b_j$ (2.30)
La matrice associata al tensore a b è dunque la seguente:
a b =26664
$a_1 b_1$ $a_1 b_2$ $a_1 b_3$
$a_2 b_1$ $a_2 b_2$ $a_2 b_3$
$a_3 b_1$ $a_3 b_2$ $a_3 b_3$
37775
(2.31)
Nello spazio euclideo tridimensionale, la matrice associata al prodotto tensoriale di
due vettori a e b è invece la seguente:
a b =24
$a_1 b_1$ $a_1 b_2$
$a_2 b_1$ $a_2 b_2$
35
(2.32)

2.1.10 Cambiamento di base

Si è visto che, assegnato un vettore o un tensore, la loro rappresentazione numerica si
ottiene scegliendo una base nello spazio vettoriale. Se n è la dimensione dello spazio, la
rappresentazione numerica del vettore è un vettore numerico di $<^n$, ovvero una matrice
di dimensione n × 1, mentre quella del tensore è una matrice di dimensione n × n. Si è
visto anche come ottenere tali componenti rispetto ad una base ortonormale.
Evidentemente uno stesso vettore o uno stesso tensore hanno rappresentazione numerica
diversa rispetto a basi diverse. Si vuole qui determinare le relazioni che consentono
di passare dalla rappresentazione rispetto ad una base ortonormale a quella rispetto ad

una seconda base ancora ortonormale.
Siano allora assegnate le due basi ortonormali $\{e_i\}$ e $\{e_{0i}\}$. Le componenti u_{0i} si ottengono come noto:

$u_{0i} = u \cdot e_{0i}$ (2.33)

Sostituendo in tale relazione l'espressione di u in termini di componenti rispetto ad
$\{e_i\}$, ovvero $u = u_j e_j$, si ottiene [7]:

$u_{0i} = (u_j e_j) \cdot e_{0i} = u_j e_j \cdot e_{0i} = (e_j \cdot e_{0i}) u_j = Q_{ij} u_j$ (2.34)

[7]Per esteso, assumendo come esempio i = 2, si ha:
$u_{02} = (u_1 e_1+u_2 e_2+u_3 e_3) \cdot e_{02} = (e_1 \cdot e_{02}) u_1+(e_2 \cdot e_{02}) u_2+(e_3 \cdot e_{02}) u_3 = Q_{21} u_1+Q_{22} u_2+Q_{23} u_3$

ovvero

$u_{0i} = Q_{ij} u_j$ (2.35)

La matrice Q_{ij} la cui componente ij, come visto nella relazione precedente, è data da

$Q_{ij} = e_j \cdot e_{0i}$ (2.36)

è detta matrice del cambiamento di base. Per esteso si ha:

26664
u_{01}
u_{02}
u_{03}
37775
=26664
$e_1 \cdot e_{01}$ $e_2 \cdot e_{01}$ $e_3 \cdot e_{01}$
$e_1 \cdot e_{02}$ $e_2 \cdot e_{02}$ $e_3 \cdot e_{02}$
$e_1 \cdot e_{03}$ $e_2 \cdot e_{03}$ $e_3 \cdot e_{03}$
37775
26664
u_1
u_2
u_3
37775
Q =26664
$e_1 \cdot e_{01}$ $e_2 \cdot e_{01}$ $e_3 \cdot e_{01}$
$e_1 \cdot e_{02}$ $e_2 \cdot e_{02}$ $e_3 \cdot e_{02}$
$e_1 \cdot e_{03}$ $e_2 \cdot e_{03}$ $e_3 \cdot e_{03}$
37775
(2.37)

Dunque il prodotto righe per colonne di Q per il vettore delle componenti di u rispetto
a $\{e_i\}$ fornisce il vettore delle componenti di u rispetto a $\{e_{0i}\}$.
Chiamando, per semplicità, 'vecchia base' $\{e_i\}$ e 'nuova base' $\{e_{0i}\}$, è utile osservare
che nella j-esima colonna di Q sono ordinate le componenti del vettore e_j della vecchia
base rispetto alla nuova base $\{e_{0i}\}$.
Si consideri un esempio ulteriore in dimensione 2 (n = 2). Sia l'angolo di cui deve
ruotare in senso antiorario la vecchia base $\{e_i\}$per sovrapporsi alla nuova $\{e_{0i}\}$ (figura
2.3).
α

$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}'_1$
$\mathbf{e}'_2$
α cos
αsen
α cos
α sen
Figura 2.3: Cambiamento di base.
Si ha in questo caso:
Q = Q() =24
cos sen
−sen cos 35 (2.38)
Indicando, con il solito consapevole abuso di notazione, con u oltre al vettore geometrico
anche il vettore numerico ad esso associato rispetto alla base $\{e_i\}$, e con u_0 il
vettore numerico associato ad u rispetto alla base $\{e_{0i}\}$, la (2.35) si scrive:
$u_0 = Qu$ (2.39)

Si dimostra che la matrice di passaggio da una base ortonormale ad un'altra anch'essa
ortonormale è ortogonale, ovvero caratterizzata, tra le altre proprietà, da quella per
cui la sua inversa coincide con la trasposta:
$Q_{-1} = Q_t$ (2.40)
Invertendo la (2.39) e sfruttando il fatto che Q è ortogonale si ha:
$u = Q_t u_0$ (2.41)
Si vuole ora vedere come cambia la matrice associata ad un tensore quando cambia
la base. A questo scopo, indicando ancora con u, v e A sia i due vettori ed il tensore
che i vettori numerici e la matrice rispetto alla vecchia base $\{e_i\}$, e con u_0, v_0 e A_0 i
vettori numerici e la matrice rispetto alla nuova base $\{e_{0i}\}$, si ha:
$v = Au$ (2.42)
anche in termini di rappresentazioni numeriche, ovvero per i vettori numerici u, v e la
matrice A. Utilizzando allora le formule (2.39) e (2.41) per il cambiamento di base si
ricava:
$v_0 = Qv = QAu = QAQ_t u_0 = A_0 u_0$ (2.43)
La matrice A_0 associata al tensore A rispetto alla nuova base $\{e_{0i}\}$ si ottiene pertanto da:
$A_0 = QAQ_t$ (2.44)

2.1.11 Richiami di analisi tensoriale

Assegnata un'origine nello spazio tridimensionale, ogni punto dello spazio può essere
identificato mediante il suo vettore posizione x avente l'estremo iniziale nell'origine
e quello finale nel punto stesso. Introducendo l'usuale prodotto scalare, l'insieme dei
vettori posizione dello spazio assume la struttura di spazio euclideo.

Si introduca nello spazio euclideo tridimensionale una base ortonormale, che si indicherà
con {e_1, e_2, e_3} oppure con {i, j, k} a seconda della convenienza. Il vettore di $<_3$
delle componenti di un vettore posizione x rispetto a tale base si indicherà dunque nei
due seguenti modi alternativi:
x =26664
x_1
x_2
x_3
37775
=26664
x
y
z
37775
(2.45)
La prima delle due notazioni è conveniente quando si voglia compattare le relazioni
mediante la notazione indiciale. La seconda è utile adoperarla in quanto molto utilizzata.
Si consideri un insieme dello spazio eucideo tridimensionale. Una funzione che
ad ogni punto x 2 associa uno scalare = (x) è detta un campo scalare.
Una funzione che ad ogni punto x 2 associa un vettore u = u(x) è detta un campo vettoriale.
Una funzione che ad ogni punto x 2 associa un tesore A = A(x) è detta un campo tensoriale.

Gradiente di un campo scalare o vettoriale
Per quanto sia possibile dare una definizione generale dei gradienti di un campo scalare
o vettoriale, qui si preferisce per semplicità fornire direttamente le formule che
forniscono le componenti di tali gradienti rispetto ad una base ortonormale assegnata.
Sia assegnato un campo scalare definito su , e sia derivabile almeno una volta
rispetto a ciascuna delle componenti. Il gradiente di è un campo vettoriale, definito
ancora su , che si indica con r oppure con grad e che in componenti è dato da:
r =
2666666664
@
@x
@
@y
@
@z
3777777775
=
2666666664
@
@x_1

@
@x_2
@
@x_3
3777777775
=26664
,1
,2
,3
37775
(2.46)
dove la virgola seguita dall'indice i indica l'operazione di derivata parziale rispetto alla
componente x_i. In notazione indiciale si ha:
$(r)_i = {}_{,i}$ (2.47)
Sia assegnato un campo vettoriale u definito su , e sia u derivabile almeno una volta rispetto a ciascuna delle componenti. Il gradiente di u è un campo tensoriale,
definito ancora su , che si indica con ru oppure con grad u, e che in componenti è
dato da:
ru =
2666666664
@u_x
@x
@u_x
@y
@u_x
@z
@u_y
@x
@u_y
@y
@u_y
@z
@u_z
@x
@u_z
@y
@u_z
@z
3777777775
=
2666666664
@u_1
@x_1
@u_1
@x_2
@u_1
@x_3
@u_2
@x_1

$@u_2$
$@x_2$
$@u_2$
$@x_3$
$@u_3$
$@x_1$
$@u_3$
$@x_2$
$@u_3$
$@x_3$
3777777775
=26664
$u_{1,1}$ $u_{1,2}$ $u_{1,3}$
$u_{2,1}$ $u_{2,2}$ $u_{2,3}$
$u_{3,1}$ $u_{3,2}$ $u_{3,3}$
37775
(2.48)
In notazione indiciale si ha:
$(ru)_{ij} = u_{i,j}$ (2.49)
Divergenza di un campo vettoriale o tensoriale
Sia assegnato un campo vettoriale u definito su , e sia u derivabile almeno una volta
rispetto a ciascuna delle componenti. La divergenza di u è un campo scalare, definito
ancora su , che si indica con div u e che in componenti è dato da:
div u =
$@u_x$
$@x$
+
$@u_y$
$@y$
+
$@u_z$
$@z$
=
$@u_1$
$@x_1$
+
$@u_2$
$@x_2$
+
$@u_3$
$@x_3$
$= u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = u_{i,i}$ (2.50)
Sia assegnato un campo tensoriale A definito su , e sia A derivabile almeno una
volta rispetto a ciascuna delle componenti. La divergenza di A è un campo vettoriale,

definito ancora su , che si indica con divA e che in componenti è dato da:
divA =
2666666664
$@A_{11}$

@x_1
+
@A_{12}
@x_2
+
@A_{13}
@x_3
@A_{21}
@x_1
+
@A_{22}
@x_2
+
@A_{23}
@x_3
@A_{31}
@x_1
+
@A_{32}
@x_2
+
@A_{33}
@x_3
3777777775
(2.51)
In notazione indiciale si ha:
$(\mathrm{div}A)_i = A_{ij,j}$ (2.52)
Teorema della divergenza per un campo vettoriale
Sia assegnato un campo vettoriale u su un dominio dello spazio tridimensionale euclideo.
Sia inoltre u derivabile almeno una volta rispetto alle sue componenti e si faccia l'ipotesi che il contorno @ di sia dotato di piano tangente in tutti i punti tranne al più un insieme di punti di misura nulla. Nell'ulteriore ipotesi che la divergenza di u sia integrabile su vale la seguente relazione:
Z
div u d =Z$_@$
u · n d S (2.53)
dove con n si è indicata la normale uscente a @.
Il teorema della divergenza si enuncia anche dicendo che, nelle suddette ipotesi, il flusso del vettore u attraverso il contorno di è pari all'integrale della sua divergenza esteso a .
In componenti la relazione (2.53) si scrive come segue:
Z
$u_{i,i}$ d =Z$_@$
u_i n_i d S (2.54)
Teorema della divergenza per un campo tensoriale
Sia assegnato un campo tensoriale A su un dominio dello spazio

tridimensionale euclideo. Sia inoltre A derivabile almeno una volta rispetto alle sue componenti e si faccia l'ipotesi che il contorno @ di sia dotato di piano tangente in tutti i punti tranne al più un insieme di punti di misura nulla. Nell'ulteriore ipotesi che la divergenza di A sia integrabile su vale la seguente relazione:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} A n \, dS \qquad (2.55)$$

dove con n si è indicata la normale uscente a @, mentre An indica, come al solito, il trasformato di n attraverso A.

Il teorema della divergenza per un campo tensoriale si enuncia anche dicendo che, nelle suddette ipotesi, il flusso del tensore A attraverso il contorno di è pari all'integrale della sua divergenza esteso a .

In componenti la relazione (2.55) si scrive come segue:

$$\int_{\Omega} A_{ij,j} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} A_{ij} n_j \, dS \qquad (2.56)$$

ovvero per esteso:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} A_{11,1} + A_{12,2} + A_{13,3} \\ A_{21,1} + A_{22,2} + A_{23,3} \\ A_{31,1} + A_{32,2} + A_{33,3} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} dS \qquad (2.57)$$

Il teorema della divergenza per un campo tensoriale si ricava come conseguenza di quello valido per un campo vettoriale considerando ciascuna delle tre componenti di divA come la divergenza di un campo vettoriale. Ad esempio, si consideri la seconda componente di divA, che in notazione indiciale è data da $(\operatorname{div}A)_2 = A_{2j,j}$. Per semplicità conviene cambiare l'indice 'muto' j in i, in modo da ottenere che[8] $(\operatorname{div}A)_2 = A_{2i,i}$.

Sostituendo allora $u_{i,i}$ con $A_{2i,i}$ nella relazione (2.54) si ha.

$$\int A_{2i,i}\, d = \int_{@} A_{2i}\, n_i\, d S \quad (2.58)$$

Cambiando di nuovo l'indice 'muto' i in j, si ottiene in definitiva:

$$\int A_{2j,j}\, d = \int_{@} A_{2j}\, n_j\, d S \quad (2.59)$$

che rappresenta proprio la relazione (2.56) nel caso i = 2.
Ovviamente lo stesso ragionamento vale anche per i = 1 e per i = 3.

[8]Come si è già visto in precedenza in un caso analogo, essendo j nella relazione precedente un indice su cui bisogna effettuare una sommatoria, esso è detto muto in quanto può essere sostituito con qualsiasi altro indice non utilizzato nella relazione stessa.

2.2 Cinematica del modello continuo tridimensionale

Da un punto di vista fisico non esiste un materiale che sia privo di vuoti a qualsiasi scala lo si osservi. Tuttavia per molti materiali e per molte applicazioni ingegneristiche la scala di osservazione è tale che la loro schematizzazione come continui, cioè privi di vuoti, risulta efficace.

In questo capitolo si studia la cinematica del modello di continuo tridimensionale formulato nella prima metà dell"800 dal fisico-matematico Cauchy, modello che è di gran lunga il più utilizzato nelle applicazioni. Con esso un corpo continuo B è definito mediante una corrispondenza biunivoca tra le sue particelle materiali ed i punti di un dominio connesso dello spazio euclideo tridimensionale, identificati mediante il loro vettore posizione x rispetto ad un origine O. Nella presente trattazione si assumerà che sia un'insieme chiuso e regolare, sulla cui frontiera il piano tangente è definito quasi ovunque, eccetto al più un insieme di punti di misura nulla.

La cinematica studia l'evoluzione della configurazione di B rispetto al tempo t, attraverso una corrispondenza che ad ogni punto x di , che è anche detto 'configurazione di riferimento', associa, in ogni istante t, il punto x = (x, t) di un dominio = (t), che è invece detto 'configurazione attuale'. Si precisa che non deve in generale coincidere con una configurazione effettivamente assunta dal corpo. In questo contesto, tuttavia, per il tipo di applicazioni che si intende svolgere conviene supporre coincidente con una 'configurazione iniziale' (t_o) indeformata assunta ad un istante t_o. Per brevità di notazione si sottointenderà la dipendenza da t e si scriverà quindi:

x = (x) (2.60)
Ω
Ω∗
χ
x
x*
O **i** = **e**1
j = **e**2 **k** = **e**3
Figura 2.4: Deformazione.
L’intera sezione 2.2 è stata strutturata in modo tale da poter studiare solamente le
sezioni 2.2.4, 2.2.8 e 2.2.9 omettendo il resto, in modo da acquisire la conoscenza solo
dei risultati essenziali validi nell’ipotesi di piccoli spostamenti e, entro certi limiti, anche
del loro significato fisico.

2.2.1 Gradiente della deformazione

Poiché si escludono dalla presente trattazione fenomeni di frattura o compenetrazione,
la funzione si assume continua ed invertibile con inversa continua. Si assume inoltre
che sia derivabile fino all’ordine di derivazione richiesto dagli sviluppi successivi. In
particolare, si assume che sia una volta differenziabile e che dunque si abbia:
(x) = (x_o) + r(x_o) (x − x_o) + o(kx − x_ok) 8 x_o, x 2 (2.61)
dove il termine o(kx − x_ok) indica un infinitesimo di ordine superiore a quello di kx − x_ok.
Per esprimere le relazioni (2.60) e (2.61) in termini di componenti, si introduce una
base ortonormale che si indicherà, a seconda della convenienza del caso, con {i, j, k} o
con {e_1, e_2, e_3}. Le componenti dei vettori posizione x e x rispetto a tale base saranno
indicate analogamente con le due notazioni alternative:
x =26664
x
y
z
37775
=26664
x_1
x_2
x_3
37775
x =26664
x
y
z
37775
=26664

x1
x2
x3
37775
(2.62)
La corrispondenza che definisce la deformazione del corpo è dunque esprimibile numericamente,
rispetto a tale base, mediante la seguente funzione definita in <3 ed a valori in <3: 8>><>>:
x = x(x, y, z)
y = y(x, y, z)
z = z(x, y, z)
(2.63)
mentre il gradiente della deformazione r è espresso dalla matrice:
r =
2666666664
@x
@x
@x
@y
@x
@z
@y
@x
@y
@y
@y
@z
@z
@x
@z
@y
@z
@z
3777777775
(2.64)

2.2.2 Deformazione di un intorno elementare

Se si studia la deformazione che avviene in un intorno di un punto x_o di utilizzando
l'espressione che si ottiene dalla (2.61) trascurando l'infinitesimo di ordine superiore
o(kx − x_ok), ovvero l'espressione linearizzata seguente:
(x) = (x_o) + r(x_o) (x − x_o) (2.65)
si dice che si sta studiando la deformazione in un intorno elementare di x_o, che si indicherà
con I_o. Un tale intorno si trasforma mediante la deformazione (2.65) in un intorno

I_o di x_o. Il gradiente r(x_o) si indica spesso con F(x_o) ed è noto come 'gradiente della deformazione'. Per brevità di notazione si ometterà quasi sempre nel seguito la

dipendenza da x_o e si porrà:
$F = F(x_o) = r(x_o)$ (2.66)
Sostituendo la (2.66) nella (2.65), e quest’ultima a sua volta nella (2.60), si ottiene:
$x = x_o + F(x - x_o)$ (2.67)
avendo posto $x_o = (x_o)$.
Ω
Ω*
χ
xo
x*o
*I*o
*I*o*
O
Figura 2.5: Deformazione di un intorno elementare.
Per assicurare l’invertibilità della trasformazione il determinante di F deve essere
non nullo. Inoltre per un motivo che sarà chiarito in seguito, si assume anche detF > 0.
La relazione (2.67) è somma di una trasformazione costante, data dal termine x_o ,
e di una lineare costituita dal termine $F(x - x_o)$. Una corrispondenza di tale tipo è
anche detta una ‘trasformazione affine’, o ‘affinità’. Essa trasforma rette in rette, piani
in piani, e conserva le relazioni di parallelismo. Per mostrare ciò si consideri una retta
r_1 di equazione parametrica (figura 2.6):
$x\ 2\ r_1\ ()\ x = x_1 + t\ h\ t\ 2 <$ (2.68)
che passa per il punto di posizione x_1 ed è parallela al vettore h.
Sostituendo l’espressione (2.68) di x nella (2.67) si ottiene per x l’espressione:
$x\ 2\ r_1\ ()\ x = x_o + F(x_1 + t\ h - x_o) = x_o + F(x_1 - x_o) + Ft\ h = x_1 + t\ (Fh)$
(2.69)
cioè nella retta r_1 la cui equazione parameterica è:
$x\ 2\ r_1\ ()\ x = x_1 + t\ h$ (2.70)
cioè una retta che passa per x_1 , trasformato di x_1, ed è parallela al vettore h = Fh.
Una retta r_2 parallela a r_1 ha equazione parametrica:
$x\ 2\ r_2\ ()\ x = x_2 + t\ h\ t\ 2 <$ (2.71)

x1
*r*1
h
x*1
h*
*r**1
*r*2
x2
h
*r**2
h*
x*2
O

Figura 2.6: Trasformazione di rette parallele in rette parallele.
in quanto passerà per un generico punto x_2 ma deve essere ancora parallela a h. Analogamente
a quanto visto per r_1, r_2 si trasforma in una retta r_2 di equazione parametrica:
x 2 r_2 () x = x_2 + t h (2.72)
Pertanto r_2 è ancora parallela a r_1 e quindi si è conservato il parallelismo nella trasformazione.
Si può mostrare con procedimento analogo che quadriche si trasformano in quadriche
e che, in particolare, una sfera di I_o si trasforma in un ellissoide.
Dilatazione lineare di una fibra elementare
Si definisce una 'fibra elementare' f un segmento che unisce due punti x_1 e x_2 di I_o.
Indicato con h = x_2 − x_1 il vettore che unisce x_1 ad x_2, la lunghezza l di f è data dal
modulo di h: l = khk. La fibra f si trasforma mediante la (2.65) in una f data dal segmento[9] che unisce i due punti x_1 e x_2 di I_o trasformati di x_1 e x_2. Detto h = x_2 −x_1
il vettore che unisce x_1 ad x_2 la lunghezza l di f è data dal modulo di h: l = khk.
Avendosi:
x_1 = x_o + F(x_1 − x_o)
x_2 = x_o + F(x_2 − x_o)9=;) h = x_2 − x_1 = F(x_2 − x_1) = Fh (2.73)
si ha che l = kFhk.
Si definisce 'dilatazione lineare' della fibra f e si indica con " il rapporto:
" =
l − l
l
(2.74)
Dalla (2.73) si ottiene:
" = kFhk − khk
khk
= kFhk
khk − 1 = sFh · Fh
khk_2 − 1 = sF_tFh · h
khk_2 − 1 (2.75)
[9]Poiché la (2.65) trasforma rette in rette, essa trasforma anche segmenti in segmenti.

$\mathbf{x}_o$
$\mathbf{x}^*_o$
I_o
I_o^*
$\mathbf{x}_1$
$\mathbf{x}_2$
f
$\mathbf{x}^*_1$
$\mathbf{x}^*_2$
f^*
O
Figura 2.7: Dilatazione della fibra elementare.
Introducendo il versore e = h/khk la (2.75) fornisce:

" = $pF_tFe \cdot e - 1$ (2.76)
In meccanica del continuo è molto utilizzato il tensore D definito da:
D =
1
2
($F_tF - I$) (2.77)
che prende il nome di ‘tensore della deformazione di Green’. Avendosi dalla (2.77):
$F_tF = 2D + I$ (2.78)
sostituendo nella (2.76) si ricava:
" = p(2D + I) e · e − 1 = p2De · e + I e · e − 1 = p2De · e + e · e − 1 (2.79)
Essendo poi e·e = kek_2 = 1 si ricava la seguente espressione per la dilatazione lineare:
" = "(e) = p1 + 2De · e − 1 (2.80)
Dalla (2.80) si riconosce che "(−e) = "(e), ovvero la dilatazione lineare è funzione
pari dei coseni direttori di e. Pertanto tutte le fibre elementari parallele al versore e sono
caratterizzate dalla stessa dilatazione lineare, la cui espressione è data dalla (2.80), che
dipende solo dalla direzione della fibra.
Scorrimento tra due fibre elementari ortogonali
Si considerino due fibre elementari f_a e f_b di I_o, ortogonali fra loro, parallele a due
vettori h_a e h_b, di versori $e_a = h_a/kh_ak$ e $e_b = h_b/kh_bk$ e si suppongano le fibre
orientate secondo le direzioni di h_a e h_b. Si indichi con $_{ab}$ il minore tra gli angoli
formati tra i due vettori h_a e h_b trasformati di h_a e h_b. Si ha dunque:
cos $_{ab}$ =
$h_a \cdot h_b$
$kh_ak\ kh_b\ k$
=
$Fh_a \cdot Fh_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
(2.81)

Essendo le due fibre ortogonali nella configurazione iniziale il minore degli angoli
formati da h_a e h_b è $_{ab}$ = /2.
Si definisce ‘scorrimento’ $_{ab}$ fra le due fibre orientate f_a e f_b la diminuzione del
minore degli angoli formati tra le fibre durante la deformazione. Si ha dunque:
$_{ab}$ = −($_{ab}$ − $_{ab}$) =

2 − $_{ab}$ (2.82)
e quindi:
sen $_{ab}$= sen
2 − $_{ab}$= cos $_{ab}$ =
$Fh_a \cdot Fh_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
=
$F_tFh_a \cdot h_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
=

$(2D + I)\, h_a \cdot h_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
=
$2Dh_a \cdot h_b + h_a \cdot h_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
=
$2Dh_a \cdot h_b$
$kFh_ak\ kFh_bk$
(2.83)
dove si è sfruttata l’ortogonalità tra h_a e h_b per cui $h_a \cdot h_b = 0$.
Ponendo $"_a = "(e_a)$ e $"_b = "(e_b)$ dalla (2.75) risulta:
$kFh_ak = (1 + "_a)\, kh_ak$ $kFh_bk = (1 + "_b)\, kh_bk$ (2.84)
Sostituendo nella (2.83) si ottiene:
sen $_{ab}$ =
$2Dh_a \cdot h_b$
$(1 + "_a)\,(1 + "_b) kh_ak\ kh_bk$
(2.85)
da cui, essendo $h_a/kh_ak = e_a$ e $h_b/kh_bk = e_b$, si ricava l’espressione finale:
sen $_{ab}$ =
$2De_a \cdot e_b$
$(1 + "_a)\,(1 + "_b)$
(2.86)

2.2.3 Dilatazione volumetrica

Detti V_o il volume di un intorno I_o di un punto x_o 2 e V $_o$ quello del suo trasformato
I_o mediante la (2.60), si definisce ‘dilatazione volumetrica’, o ‘dilatazione cubica’,
e si indica con , il limite:
 = lim
$V_o!0$
$V\ _o - V_o$
V_o
(2.87)
Da un teorema di analisi è noto che:
$V\ _o = Z_{I_o}$
$(\det F(x))\, d = (\det F)_m V_o$ (2.88)
dove con $(\det F)_m$ si è indicato il valor medio di detF su I_o. Dalle (2.147)-(2.88) si ricava:
$V\ _o - V_o$
V_o
=
$(\det F)_m V_o - V_o$
V_o
$= (\det F)_m - 1$ (2.89)
Per la continuità ipotizzata di F il suo valore medio su I_o tende a quello puntuale $F(x_o) = F$ al tendere a zero del volume di I_o, cioè di V_o, per cui si ottiene al limite:
 $= \det F - 1$ (2.90)
Dalla (2.88) si chiarisce che affinché il volume V $_o$ di I_o sia positivo per ogni intorno
I_o di ogni punto x_o 2 , come fisicamente è naturale assumere, deve risultare $\det F(x) > 0$ 8 x 2 .

2.2.4 Spostamenti

Lo spostamento del generico punto materiale dalla sua posizione x in in quella x in
 è dato da (figura 2.8):
u(x) = x − x = (x) − x (2.91)
Derivando tale relazione si ottiene:
ru(x) = r(x) − I (2.92)
Si assuma un sistema di riferimento con origine in un arbitrario punto O ed una base ortonormale levogira. A seconda dei casi si indicheranno talvolta con e_1, e_2, e_3 i
versori della base e con 1, 2 e 3 e i relativi assi orientati con origine in O, altre volte
con i, j, k i versori della base e con x, y e z gli assi. La prima scelta consente di utilizzare la notazione indiciale per cui ad esempio le componenti del vettore u si indicano
con u_i, con i = 1, 2, 3, mentre con la seconda scelta tali componenti si indicano con u_x, u_y, u_z. Ovviamente la scelta dell'una o dell'altra notazione è assolutamente
ininfluente sui risultati.

i = **e**1
j = **e**2
k = **e**3
(asse) 2 = y
(asse) 1 = x
(asse) 3 = z
O
Ω
Ω*
x* = x 1 **e**1 + x 2 **e** 2 + x 3 **e** 3 = * * *
= x * **i** + y * **j** + z * **k**
x = x 1 **e** 1 + x 2 **e** 2 + x 3 **e** 3 =
= x **i** + y **j** + z **k**
u(x)

Figura 2.8: Spostamento e sistema di riferimento.

Rispetto alla base {e_1, e_2, e_3} = {i, j, k} il gradiente ru è rappresentato dalla seguente matrice, che per brevità di notazione verrà indicata anch'essa con ru:
ru =
2666666664
@u_x
@x
@u_x
@y
@u_x
@z
@u_y
@x
@u_y
@y
@u_y
@z
@u_z
@x

$@u_z$
$@y$
$@u_z$
$@z$
3777777775
=
2666666664
$@u_1$
$@x_1$
$@u_1$
$@x_2$
$@u_1$
$@x_3$
$@u_2$
$@x_1$
$@u_2$
$@x_2$
$@u_2$
$@x_3$
$@u_3$
$@x_1$
$@u_3$
$@x_2$
$@u_3$
$@x_3$
3777777775
= 26664
$u_{1,1}$ $u_{1,2}$ $u_{1,3}$
$u_{2,1}$ $u_{2,2}$ $u_{2,3}$
$u_{3,1}$ $u_{3,2}$ $u_{3,3}$
37775
(2.93)
In notazione indiciale si scriverà sinteticamente $(ru)_{ij} = u_{i,j}$.

2.2.5 Spostamenti dell’intorno elementare

Nello stesso spirito con cui si assume lecito utilizzare l’espressione linearizzata
(2.65)
per la trasformazione di un intorno elementare I_o, gli spostamenti in I_o possono
essere
linearizzati in modo analogo come segue:
$u(x) = u(x_o) + ru(x_o)\ (x - x_o)$ (2.94)
Riscrivendo la (2.92) in x_o in termini di $F(x_o) = F$ si ottiene:
$F = I + ru(x_o) = I + ru$ (2.95)
dove nell’ultimo termine si è sottointeso che ru va calcolato in x_o. Il tensore
della
deformazione di Green si riscrive allora in funzione di ru come segue:
D =
1
2
$(F_tF - I)$ =
1

$$\frac{1}{2}[(I + \nabla u)^t (I + \nabla u) - I] \qquad (2.96)$$

ovvero:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) + \frac{1}{2}\nabla u \nabla u^t \qquad (2.97)$$

in cui il primo termine è lineare in ∇u mentre il secondo è funzione quadratica di ∇u. Rispetto alla base adottata ed usando la notazione indiciale si ha che $[(\nabla u)^t]_{ik} = (\nabla u)_{ki} = u_{k,i}$ ed inoltre il prodotto $(\nabla u)^t(\nabla u)$ si traduce nel 'prodotto righe per colonne':

$$[(\nabla u)^t(\nabla u)]_{ij} = [(\nabla u)^t]_{ik}(\nabla u)_{kj} = u_{k,i}\, u_{k,j} \qquad (2.98)$$

dove si è utilizzata la convenzione dell'indice ripetuto[10]. Pertanto risulta:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{k,i}\, u_{k,j} \qquad (2.100)$$

Esplicitando i termini della (2.100) si ha:

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 1 \end{cases} \Rightarrow D_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (2.101)$$

[10] Secondo la convenzione dell'indice ripetuto va sempre svolta la sommatoria per l'indice k che varia nel suo intervallo di validità, in questo caso tra 1 e 3, pur omettendo per brevità il simbolo della sommatoria. Nel caso in esame non utilizzando tale convenzione andrebbe scritto esplicitamente:

$[(\nabla u)^t(\nabla u)]_{ij} = \sum_{k=1}^{3} [(\nabla u)^t]_{ik}(\nabla u)_{kj} = \sum_{k=1}^{3}$

$u_{k,i}\, u_{k,j} = u_{1,i}\, u_{1,j} + u_{2,i}\, u_{2,j} + u_{3,i}\, u_{3,j}$ (2.99)

L'indice ripetuto è anche detto 'muto' in quanto, facendo riferimento ad esempio all'espressione (2.99),
k può essere sostituito da un qualsiasi altro indice diverso da i e j, che sono stati già utilizzati.

$$\left.\begin{array}{l} i = 2 \\ j = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}\left(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2\right) = \\ = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\right] \quad (2.102)$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 3 \\ j = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow D_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}\left(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2\right) = \\ = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] \quad (2.103)$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 1 \\ j = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) + \frac{1}{2}$$

$$(u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \quad (2.104)$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 2 \\ j = 3 \end{array}\right\} \to D_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) + \frac{1}{2}(u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{\partial u_z}{}\right.$$

$$\partial z \quad (2.105)$$

$$i = 3$$

$$j = 135 \rightarrow D_{31} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) + \frac{1}{2}(u_{1,3}u_{1,1} + u_{2,3}u_{2,1} + u_{3,3}u_{3,1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad (2.106)$$

ed inoltre per la simmetria[11] di D:

$$D_{21} = D_{12} \quad D_{32} = D_{23} \quad D_{13} = D_{31} \quad (2.108)$$

2.2.6 Ipotesi di piccoli spostamenti

Si dice valida l'ipotesi di piccoli spostamenti se dati due punti A e B di , detta l_{AB} la lunghezza di una qualsiasi curva che li unisca e che sia tutta contenuta in , ed indicati con u_A e u_B gli spostamenti di tali punti, risulta:

$$\frac{\|u_B - u_A\|}{l_{AB}} << 1 \quad (2.109)$$

Prendendo A e B sufficientemente vicini da poter utilizzare la (2.94), si ha:

$$u_B - u_A = \nabla u(x_A)(x_B - x_A) \quad (2.110)$$

Se poi si pone:

$$x_A = (x, y, z) \quad x_B = (x + x, y, z) \quad (2.111)$$

si ha $l_{AB} = x$ ed inoltre

$$u_B - u_A = \frac{\partial u_x}{\partial x} x$$

@u_y
@x
x
@u_z
@x
x_t
(2.112)
per cui si ha:
ku_B − u_Ak
l_{AB}
= ku_B − u_Ak
x
= s@u_x
@x 2
+ @u_y
@x 2
+ @u_z
@x 2
<< 1 (2.113)
che implica

@u_x
@x << 1
@u_y
@x << 1
@u_z
@x << 1 (2.114)
Ragionando in modo analogo si mostra che se vale l’ipotesi di piccoli spostamenti allora
anche le altre componenti del gradiente del campo di spostamenti devono essere piccole,
ovvero deve aversi:
@u_i
@x_j << 1 8i, j = 1, 2, 3 (2.115)
[11]D è simmetrico in quanto metà della somma del tensore simmetrico F_t F e del tensore identico. La
simmetria di F_t F si ricava dalla relazione:
(F_t F) a · b = F_t Fa · b = Fa · Fb = a · F_tFb = a · (F_t F) b 8 a, b (2.107)

2.2.7 Tensore della deformazione infinitesima
Nell’ipotesi di piccoli spostamenti il termine quadratico diventa trascurabile rispetto a
quello lineare nell’espressione del tensore della deformazione di Green. Pertanto si può
porre:
D = E (2.116)
dove il tensore simmetrico E è detto ‘tensore della deformazione infinitesima’ ed è dato
da:
E = symru =
1
2

(ru + ru_t) (2.117)
cioè rappresenta la parte simmetrica[12] del gradiente del campo di spostamenti.
Sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti si semplificano le espressioni della dilatazione
lineare e dello scorrimento per le fibre elementari. Infatti dalla (2.80) si ottiene:
$(1 + ")^2 = 1 + 2Ee \cdot e$ (2.119)
Essendo $2Ee \cdot e << 1$, anche nel primo termine risulta " << 1. Elevando allora al
quadrato ambo i membri:
$1 + 2" + "^2 = 1 + 2Ee \cdot e$, (2.120)
ed osservando che il termine quadratico $"^2$ è trascurabile rispetto a quello lineare 2 ", si
può porre:
$"(e) = Ee \cdot e$ (2.121)
Analogamente, per l'espressione (2.86) nell'ipotesi di piccoli spostamenti si ricava
che $1 + "_a = 1 + "_b = 1$ da cui:
sen $_{ab} = 2Ee_a \cdot e_b$ (2.122)
Essendo il primo termine molto piccolo risulta sen $_{ab} = {}_{ab}$ e dunque si può porre:
$_{ab} = 2Ee_a \cdot e_b$ (2.123)
Rispetto alla base {i, j, k} = {e_1, e_2, e_3} il tensore E è rappresentabile attraverso
una matrice la cui componente E_{ij} è data da[13]:
$E_{ij} = Ee_j \cdot e_i$ (2.129)

[12]Un tensore A è decomponibile in un unico modo nella somma della sua parte simmetrica symA e
della sua parte emisimmetrica emiA:
A = symA + emiA con: symA =
1
2
($A + A_t$) emiA =
1
2
($A - A_t$) (2.118)

[13]Si ricorda che la componente A_{ij} di un tensore A rispetto ad una base {e_1, e_2, e_3} è data da:
$A_{ij} = Ae_j \cdot e_i$ (2.124)
Infatti un tensore A è un operatore lineare che al generico vettore u lega il vettore v = Au. Dette v_k e
u_j le componenti di v e u, con k, j = 1, 2, 3, si ha:
$v = v_k e_k = Au = A(u_j e_j) = u_j (Ae_j)$ (2.125)

Pertanto si ha:
i = 1 j = 1 $E_{11} = Ee_1 \cdot e_1 = "(e_1) = "_x$
i = 2 j = 2 $E_{22} = Ee_2 \cdot e_2 = "(e_2) = "_y$
i = 3 j = 3 $E_{33} = Ee_3 \cdot e_3 = "(e_3) = "_z$
i = 1 j = 2 $E_{12} = Ee_1 \cdot e_2 =$
1
2
xy
i = 1 j = 3 $E_{13} = Ee_1 \cdot e_3 =$
1
2
xz
i = 2 j = 3 $E_{23} = Ee_2 \cdot e_3 =$

1
2
yz
(2.130)
ed inoltre per la simmetria di E:
$E_{21} = E_{12}$ $E_{31} = E_{13}$ $E_{32} = E_{23}$ (2.131)
Indicando per semplicità ancora con E la matrice associata al tensore della deformazione
infinitesima, detta anche ‘matrice della deformazione’, si ha dunque:
E =26664
"x
1
2xy
1
2xz
1
2xy "y
1
2yz
1
2xz
1
2yz "z
37775
(2.132)
I termini della diagonale rappresentano le dilatazioni delle fibre parallele agli assi del
riferimento mentre i termini ij fuori diagonale rappresentano gli scorrimenti tra le fibre
parallele agli assi i e j.
Dalle (2.117) e (2.130) si ottengono le seguenti espressioni delle deformazioni e
Moltiplicando scalarmente ambo i membri per il versore e_i si ottiene:
v_k $e_k \cdot e_i = u_j$ $(Ae_j \cdot e_i)$ (2.126)
Essendo la base ortonormale si ha che $e_k \cdot e_i = {}_{ik}$, dove il cosiddetto ‘simbolo di Kronecker’ ${}_{ik}$ è definito da:
${}_{ik}$ =8<:
1 se i = k
0 se i 6= k
(2.127)
cioè rappresenta la componente ik della matrice identità. E’ facile allora verificare che ${}_{ik}$ $v_k = v_i$ per
cui si ottiene:
$v_i = (Ae_j \cdot e_i)$ $u_j = A_{ij}$ u_j (2.128)
dove appunto A_{ij} rappresenta la componente ij della matrice associata al tensore A rispetto alla base
scelta.
Nel seguito per brevità di notazione si utilizzerà la stessa notazione A per indicare sia il tensore che la
matrice associata al tensore. E’ chiaro da quanto detto che la matrice dipende dalla base scelta.

degli scorrimenti caratterizzanti le fibre parallele agli assi del riferimento:
"x =
@ux
@x
"y =
@uy

∂y

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{2.133}$$

Per determinare l’espressione della dilatazione volumetrica nell’ipotesi di piccoli spostamenti conviene scrivere la (2.95) in componenti e sostituire nella (2.90):

$$\theta = \det F - 1 = \det(I + \nabla u) - 1 = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} - 1 \tag{2.134}$$

Sviluppando il determinante si ottiene:

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \; = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (2.135)$$

essendo il termine almeno quadratico nelle componenti di ∇u. Tenendo conto anche delle (2.133) si può quindi porre:

$$= \mathrm{tr}E = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (2.136)$$

2.2.8 Sintesi dei risultati per il caso di piccoli spostamenti

In questa sezione si sintetizzano i risultati ottenuti nel caso di piccoli spostamenti fornendone alcune semplici intepretazioni. Ciò per consentire, a chi non abbia studiato le relative dimostrazioni, di conoscere e poter applicare tali risultati capendone nelle grandi linee il significato fisico. A tale scopo si ripetono sia l'enunciato dell'ipotesi di piccoli spostamenti sia alcune altre definizioni.

Si dice valida l'ipotesi di piccoli spostamenti se, dati due punti A e B di , detta l_{AB} la lunghezza di una qualsiasi curva che li unisca e che sia tutta contenuta in , ed indicati con u_A e u_B gli spostamenti di tali punti, risulta:

$$\frac{\|u_B - u_A\|}{l_{AB}} << 1 \qquad (2.137)$$

Nello studio della deformazione in un punto $x_o \in$, si introduce il concetto di 'intorno elementare' del punto. Tutti i risultati che si riportano di seguito si ottengono facendo riferimento alla deformazione delle fibre dell'intorno elementare e facendo tendere a zero il suo volume.

Per tale motivo tutte le grandezze che identificano la deformazione dell'intorno del punto, ovvero la dilatazione lineare di una fibra, lo scorrimento tra due fibre e la dilatazione volumetrica, vanno intesi come valori puntuali.

Nella figura 2.5 si illustra la deformazione dell’intorno elementare I_o di un punto x_o,
che trasforma tale intorno nell’intorno I_o del punto x_o trasformato di x_o.
Si definisce una ‘fibra’ dell’intorno elementare un segmento che unisce due punti
dell’intorno (figura 2.9). Se si da un orientamento sulla fibra, la fibra si dice orientata
ed è definita dal vettore che unisce il primo con il secondo punto.

χ

x

o **x***

o

I_o

I_o

*

O

A

B

A

*B**

*

Figura 2.9: Fibra dell’intorno elementare: nell’esempio in figura la fibra che unisce i
punti A e B nella conigurazione indeformata si trasforma, in quella deformata, nella
fibra che unisce i trasformati A e B dei punti A e B.

Si dimostra che dopo la deformazione, una fibra dell’intorno elementare I_o, si trasforma
un un altro segmento (rettilineo), ovvero una fibra dell’intorno I_o .
Si definisce ‘dilatazione lineare’ di una fibra f di lunghezza iniziale l e lunghezza
finale dopo la deformazione pari a l, e si indica con ", il rapporto:

" =
l − l
l
(2.138)

Nell’ipotesi di piccoli spostamenti le dilatazioni lineari delle fibre nelle direzioni parallele
agli assi x, y e z sono chiamate rispettivamente $"_x$, $"_y$ e $"_z$ e sono legate al campo
degli spostamenti dalle relazioni:

$"_x$ =
$@u_x$
@x
$"_y$ =
$@u_y$
@y
$"_z$ =
$@u_z$

@z
(2.139)
Tali relazioni possono essere ricordate pensando al ‘cubetto elementare di figura
2.10.a, di volta in volta, come un concio di una trave con asse in direzione x, y e z.
In particolare, nel terzo caso la relazione che fornisce la deformazione assiale del concio
sarebbe "$_a$ = w$_0$(z) = dw/ dz. Essendo nella notazione qui utilizzata w = u$_z$ ed
"$_a$ = "$_z$, e cambiando i simboli della derivata totale in quelli di derivata parziale, si
ottiene "$_z$ = @u$_z$/@z, ovvero la terza delle relazioni (2.139).
Nelle figure 2.10.b-2.10.d sono riportate le configurazioni deformate del cubetto nei
casi di sola dilatazione lineare in direzione x, in direzione y ed in direzione z, a meno
di spostamenti rigidi aggiuntivi.

e$_3$ = k
e $_2$ = j
e$_1$ = i
(a)
(c) (d)
(b)
Figura 2.10: Deformazione del cubetto elementare: (a) cubetto indeformato; (b) sola
dilatazione "$_x$; (c) sola dilatazione "$_y$; (d) sola dilatazione "$_z$.
Date due fibre orientate f$_a$ e f$_b$, ortogonali fra loro, si definisce ‘scorrimento’ $_{ab}$ la
diminuzione del minore degli angoli formati tra le fibre durante la deformazione, che
inizialmente è uguale /2. Si ha dunque (figura 2.11):
$_{ab}$ = −($_{ab}$ − $_{ab}$) =

2 − $_{ab}$ (2.140)
Gli scorrimenti tra le fibre parallele e concordi agli assi x, y e z sono indicati con $_{xy}$,
$_{yz}$ e $_{xz}$. Dalla definizione di scorrimento si ottiene anche che $_{yx}$ = $_{xy}$, $_{zy}$ = $_{yz}$ e
$_{zx}$ = $_{xz}$.
Nell’ipotesi di piccoli spostamenti gli scorrimenti $_{xy}$, $_{yz}$ e $_{xz}$ sono legati al campo
di spostamenti dalle relazioni:
8>
>>>><>>>>>:
$_{xy}$ = $_{yx}$ =
@u$_x$
@y
+
@u$_y$
@x
$_{yz}$ = $_{zy}$ =
@u$_y$
@z
+

@uz
@y
xz = zx =
@ux
@z
+
@uz
@x
(2.141)
Nella figura 2.12 sono riportate la configurazioni deformate del cubetto elementare
nei casi in cui solo uno degli scorrimenti delle relazioni (2.141) è non nullo mentre sono

f b
π
2
f a
α
f b* *xy
f a*
Figura 2.11: Definizione di scorrimento ab.
nulle le dilatazioni "x, "y e "z, sempre nel caso di piccoli spostamenti ed a meno di
spostamenti rigidi aggiuntivi.
In figura 2.13 si da invece un'interpretazione geometrica della prima delle (2.141).
Per le altre due l'interpretazione è analoga.
e3 = k
e 2 = j
e1 = i
(a)
(c) (d)
(b)
Figura 2.12: Deformazione del cubetto elementare in presenza di solo scorrimento:
(a) cubetto indeformato; (b) solo scorrimento xy; (c) solo scorrimento xz; (d) solo scorrimento yz.

Figura 2.13: Interpretazione geometrica di $_{xy}$ nell'ipotesi di piccoli spostamenti.
Il tensore della deformazione infinitesima E è il tensore simmetrico la cui matrice
associata ad una base ortonormale {i, j, k} è data da:
E =26664
"$_x$
1
2xy
1
2xz
1
2xy "$_y$
1
2yz
1
2xz
1
2yz "$_z$
37775
(2.142)
Si dimostrano i due risultati:

• Assegnata una fibra dell'intorno elementare di direzione individuata dal versore
a, la dilatazione lineare di tale fibra è data da:
"$_a$ = Ea · a (2.143)

• Assegnate due fibre orientate dell'intorno elementare di direzioni e versi individuati
dai versori a e b, lo scorrimento tra tali fibre è dato da:
$_{ab}$ = 2Ea · b = 2Eb · a (2.144)

E' utile osservare che per una fibra parallela all'asse x, la cui direzione è dunque
individuata dal versore i = e_1, la (2.143) fornisce effettivamente la dilatazione lineare
"$_x$. Si ha infatti:
$Ee_1 \cdot e_1 = E_{11}$ = "$_x$ (2.145)
Analogamente si verifica che $Ee_2 \cdot e_2$ = "$_y$ e che $Ee_3 \cdot e_3$ = "$_z$. Quanto agli scorrimenti,
date due fibre parallele e concordi rispettivamente agli assi x ed y, e quindi ai versori e_1
e e_2, si ha dalla (2.144):
$Ee_2 \cdot e_1 = E_{12}$ =
1
2
$_{xy}$ (2.146)
ed analogamente si verifica che $Ee_3 \cdot e_2 = E_{23} = {}_{yz}/2$ e $Ee_3 \cdot e_1 = E_{13} = {}_{xz}/2$.

Detti V_o il volume di un intorno I_o di un punto x_o 2 e V $_o$ quello del suo trasformato
I_o dopo la deformazione, si definisce 'dilatazione volumetrica', o 'dilatazione
cubica', e si indica con , il limite:
= lim

$V_o!0$
$V_o - V_o$
V_o
(2.147)
Dalla figura 2.12 si intuisce che in presenza solo di scorrimenti fra le fibre parallele
agli assi si ha una variazione di volume nulla del cubetto. In particolare, si dimostra che
nell'ipotesi di piccoli spostamenti si ha:
$= "_x + "_y + "_z$ (2.148)

2.2.9 Deformazioni principali e direzioni principali

Si definiscono 'deformazioni principali' gli autovalori del tensore della deformazione
infinitesima E e 'direzioni principali' quelle degli autovettori di E. Come è noto dall'algebra
un autovalore $"_p$ di E ed il corrispondente autovettore e_p sono soluzioni del seguente problema:
$Ee_p = "_p e_p$ () $(E - "_p I) e_p = 0$ (2.149)
che ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se
$\det(E - "_p I) = \det 26664$
$"_x - "_p$
1
2xy
1
2xz
1
2xy $"_y - "_p$
1
2yz
1
2xz
1
2yz $"_z - "_p$
37775=
0
(
2.150)
cioè se e solo se $"_p$ è soluzione della cosiddetta 'equazione caratteristica':
$-"^3_p + I_E "^2_p + II_E "_p + III_E = 0$ (2.151)
dove I_E, II_E e III_E rappresentano degli invarianti[14] rispettivamente lineare, quadratico
e cubico del tensore della deformazione e sono dati da:
$I_E = \mathrm{tr}E = "_x + "_y + "_z$
$II_E = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(E^2) - (\mathrm{tr}E)^2]$
$III_E = \det E$
(2.152)
Le fibre elementari parallele ad una direzione principale sono caratterizzate da scorrimento
nullo con qualsiasi altra fibra ad essa ortogonale. Infatti se il versore e_{pa} definisce

[14] Un invariante di un tensore è un’espressione scalare funzione delle componenti della matrice associata al tensore che però è costante rispetto ad un qualsiasi cambiamento della base rispetto a cui la matrice si determina. In altre parole, se cambia la base rispetto a cui si rappresenta la matrice associata al tensore, cambiano le componenti della matrice ma non variano, ad esempio, la traccia ed il determinante della matrice stessa, che sono dunque funzioni scalari del tensore e non della matrice ad essa associata.

una direzione principale di autovalore corrispondente "$_{pa}$, dato un qualsiasi versore e_b ad esso ortogonale si ha:

$_{ab}$ = 2E$e_{pa} \cdot e_b$ = 2 "$_{pa}$ $e_{pa} \cdot e_b$ = 0 (2.153)

per l’ortogonalità tra e_{pa} e e_b.

Essendo E simmetrico i suoi autovalori sono tutti reali. Calcolati gli autovalori risolvendo la (2.151) le corrispondenti direzioni principali si ottengono sostituendo nella (2.149) gli autovalori, uno per volta. Se essi sono tutti distinti, allora esiste una sola terna di direzioni principali individuata dai versori e_{pi}, i = 1, 3. Se due autovalori sono coincidenti, ovvero se l’equazione caratteristica ammette una radice di molteplicità 2, allora esiste un piano contentente tutte direzioni principali, la cui direzione ortogonale è anch’essa principale. Se gli autovalori sono tutti coincidenti allora tutte le direzioni sono principali.

In ogni caso esiste almeno una base ortonormale di direzioni principali {e_{pi}}, i = 1, 2, 3. Rispetto a tale base la matrice associata al tensore della deformazione infinitesima è diagonale e contiene quali termini della diagonale principale le deformazioni principali. Rispetto alla base {e_{pi}} la matrice associata ad E diventa quindi:

E =26664
"$_{p1}$ 0 0
0 "$_{p2}$ 0
0 0 "$_{p3}$
37775
(2.154)

Di particolare interesse risultano i casi in cui una o due deformazioni principali sono nulle. Nel primo caso si parla di ‘stato di deformazione piano’ mentre nel secondo si parla di ‘stato di deformazione monoassiale’. Calcolando il determinante utilizzando la rappresentazione diagonale (2.154)

detE = "$_{p1}$ "$_{p2}$ "$_{p3}$ (2.155)

si vede che lo stato di deformazione è piano o monoassiale se e solo se il determinante di E è nullo.

2.3 Statica del modello continuo tridimensionale

In questa parte si affronterà lo studio dell'equilibrio di un corpo continuo tridimensionale, la cui cinematica è stato oggetto della sezione precedente. Si consideri allora un corpo continuo B, la cui configurazione in un certo istante è definita dal dominio , soggetto ad un sistema di forze esterne F costituito da un campo vettoriale b di forze di volume definito in ed un campo vettoriale p di forze superficiali definito sulla frontiera @ (figura 2.14).

Ω
b(x)
p(x)
p(x)

Figura 2.14: Forze esterne applicate su B.

Così come fatto per le travature, la definizione di equilibrio viene data attraverso la scrittura delle 'equazioni cardinali della statica':

Definizione 2 Una corpo B soggetto al un sistema di forze F si dice in equilibrio se la risultante di F ed il momento risultante di F rispetto ad un polo arbitrario sono nulli.

Scegliendo quale polo l'origine O dei vettori posizione x che identificano ciascun punto di B, tale definizione di equilibrio equivale alla scrittura delle due equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno ad O:

Z
b(x) d +Z@
p(x) dS = 0
Z
x × b(x) d +Z@
x × p(x) dS = 0
(2.156)

L'analisi dello stato di sollecitazione all'interno del corpo B si basa, così come per le travature, sul principio di sezionamento, che qui si enuncia di nuovo con riferimento al modello in esame.

Postulato 3 Un corpo B è in equilibrio se e solo se ogni parte B_0 B è in equilibrio se soggetta al sistema di forze attive F_a direttamente agente su B_0 ed al sistema di forze reattive F_r che il mondo esterno a B_0 esplica su B_0. Il sistema F_r è in generale a sua volta costuito dalla somma delle reazioni dei vincoli esterni direttamente applicati su B_0 e delle reazioni interne che $B - B_0$ esplica su B_0.

Si considera qui per semplicità il caso in cui il corpo è privo di vincoli esterni. Si sezioni allora il corpo in due parti definite dai domini $_1$ e $_2$ aventi in comune la superficie S del sezionamento, che si suppone di tipo regolare in modo che il piano tangente sia definito in ogni suo punto (figura 2.15). La parte $_1$ dovrà allora essere in equilibrio soggetta alle forze attive direttamene agenti su di essa ed alle forze che $_2$ esercita su $_1$. Queste ultime rappresentano delle forze superficiali agenti sulla frontiera di $_1$.

b(x) Ω
p(x)
p(x)
S
Ω_1
b(x)
p(x)
S
p(x)
Ω_2
P
P
P
piano
tangente in P
n
t(x,n) -n
t(x,-n) = -t(x,n)

Figura 2.15: Sezionamento di in $_1$ e $_2$.

Preso un qualsiasi punto P di S, di posizione x, dopo il sezionamento esso sarà sia un punto di S \ $_1$ che un punto di S \ $_2$. Detta n la normale uscente da $_1$ in P, la normale uscente da $_2$ in P sarà −n. L'analisi delle forze di di interazione si basa sul seguente postulato, noto come 'postulato di Cauchy':

Postulato 4 La forza superficiale t che $_2$ esercita su $_1$ in P dipende solo dalla posizione x di P e dalla normale n al piano tangente in P uscente da $_1$, cioè si ha:

t = t(x, n) (2.157)

Pertanto, per il postulato di Cauchy, sezionando in modo diverso con due diverse superfici di sezionamento S_1 e S_2 contenenti però uno stesso punto P ed aventi in P lo stesso piano tangente (figura 2.16), le forze superficiali di interazione che le due parti si scambiano in P sono uguali.

La relazione (2.157) associa ad ogni punto P interno a e ad ogni giacitura per P di normale n un 'vettore tensione', t(x, n), che rappresenta la forza superficiale che il resto del corpo esercita su tale giacitura nell'intorno di P.

Il principio di azione e reazione implica che se t = t(x, n) è la forza per unità di superficie che $_2$ esercita su $_1$ in P, la forza che $_1$ esercita su $_2$ in P, che per il postulato di Cauchy sarà uguale a t(x,−n), dovrà essere uguale in modulo ed

opposta
in verso a t = t(x, n). Pertanto si ha (figura 2.15):
$t(x,-n) = -t(x, n)$ (2.158)

S_1
P
t(x,n)
S_2
n
Figura 2.16: Due sezionamenti S_1 e S_2 di entrambi contenenti il punto P ed aventi lo
stesso piano tangente in P.
La relazione (2.158) è anche nota come ‘lemma di Cauchy’.
Per caratterizzare la funzione (2.157) si scelga una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si
estragga quindi da B una sua parte B avente la forma di un tetraedro con tre facce
avente ciascuna quale normale uscente al tetraedro l’opposto di uno dei versori della
base, e con la quarta faccia avente una normalemcaratterizzata per semplicità da tutti e
tre i coseni direttori positivi (figura 2.17). Sia inoltre x_o la posizione del vertice opposto
alla faccia di normaleme " l’altezza relativa a tale faccia. Si osserva che sia l’area delle
facce del tetraedro che il volume di questo dipendono da " e tendono a zero al tendere a
zero di ".
Si fanno le ipotesi che sia le forze di volume b che la funzione t siano continue sul
tetraedro.
Dette A_m l’area della faccia di normale m e A_i le aree delle facce di normale $-e_i$, risulta
$A_i = (m\cdot e_i)A_m$ i = 1, 2, 3 (2.159)
Per dimostrare ciò si osserva che, poiché per definizione l’i-esimo vettore della base
non dipende dalla posizione x, si ha div $e_i = 0$. Applicando allora il teorema della
divergenza al flusso uscente del vettore e_i dal tetraedro, si ha:
0 = div e_i = Z
div e_i d =$Z_@$
$e_i \cdot n$ dS = $e_i \cdot m$ Z_{A_m}
dS −
$_3$ $P_{j=1}$
$e_i \cdot e_j$ Z_{A_j}
dS
(2.160)
Poiché $e_i \cdot e_j = _{ij}$ si ha:
$_3$ $P_{j=1}$
$e_i \cdot e_j$ Z_{A_j}
dS = $_{ij} A_j = A_i$ (2.161)

e quindi:
$0 = (e_i \cdot m)A_m - A_i$ (2.162)
da cui la (2.159).

e1
e2
e3
e1
e2
e3
m
ε
O
xo
Figura 2.17: Tetraedro di Cauchy.
Per il principio di sezionamento, affinché il corpo sia in equilibrio anche il tetraedro
estratto dal corpo deve esserlo sotto l'azione delle forze di volume direttamente
applicate sul tetraedro e le tensioni interne agenti sulle facce del tetraedro. In particolare,
l'equilibrio alla traslazione del tetraedro impone che sia verificata la seguente equazione: Z
b(x) d +Z@
t(x, n) dS = 0 (2.163)
Separando i termini dell'integrale esteso a @ relativi alle quattro facce del tetraedro,
dividendo per A_m ed imponendo che la (2.160) valga per ogni valore di ", al limite per
" tendente a zero deve risultare:
lim
"!024 1
A_m0@Z
b(x) d + Z$_{A_m}$
t(x,m) dS +
3 P$_{i=1}$ Z$_{A_i}$
t(x,−e_i) dS1A
35
=
= lim
"!024 1
A_m0@Z
b(x) d + Z$_{A_m}$
t(x,m) dS −
3 P$_{i=1}$ Z$_{A_i}$
t(x, e_i) dS1A
35

=
= lim
"!0 1
A_m b()
A_m "
3
+ t($_m$,m)A_m −
3 $P_{i=1}$
t($_i$, e_i)A_i= 0
(2.164)
dove si è utilizzato il lemma di Cauchy, per cui si ha t(x,−e_i) = −t(x, e_i), ed il teorema della media. In particolare, per la continuità di b il teorema della media assicura

che esiste un punto interno al tetraedro tale che l'integrale di b esteso a è uguale a
b() per il volume del tetraedro, pari ad A_m "/3. Analogamente, per la continuità di t
esiste un punto $_m$ sulla faccia di normalemtale che l'integrale di t(x,m) su A_m è pari
a t($_m$,m)A_m ed esistono tre punti $_i$ sulle facce di normale −e_i per cui l'integrale di t(x, e_i) su A_i è pari a t($_i$, e_i)A_i, con i = 1, 2, 3.
I punti , $_m$ e $_i$ dipendono da " e, sempre per la continuità di b e t, al tendere a 0 di " essi tendono a x_o:
lim
"!0
 = lim
"!0
$_m$ = lim
"!0
$_i$ = x_o (2.165)
Si riconosce nella (2.164) che l'integrale delle forze di volume è un infinitesimo di ordine
superiore a quelli delle forze di superficie e dunque al limite si annulla. Utilizzando
poi le relazioni (2.159) e (2.165) si ottiene al limite:
1
A_m t(x_o,m)A_m −
3 $P_{i=1}$
t(x_o, e_i) (m· e_i)A_m= 0 (2.166)
e, semplificando A_m:
t(x_o,m) =
3 $P_{i=1}$
t(x_o, e_i) (m· e_i) = 3 $P_{i=1}$
t(x_o, e_i) e_i m (2.167)
dove si è utilizzata la definizione di prodotto tensoriale.
La relazione (2.167) e proprio l'espressione cercata. Estendendo infatti tale risultato
ad ogni punto x di continuità di b e t e ad ogni giacitura per x di normale n, si ottiene
t(x, n) = 3 $P_{i=1}$
t(x, e_i) e_i n = T(x) n (2.168)
Il tensore T(x) è detto 'tensore delle tensioni' in x. Dalla (2.168) si vede che

esso è
somma dei tre tensori $t(x, e_i)e_i$, per $i = 1, 2, 3$. Per $i = 1$, $t(x, e_1)$ è il vettore tensione
agente sulla faccia di normale $e_1 = i$, ovvero la faccia di normale x. In componenti
rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\} = \{i, j, k\}$:
$t(x, e_1)$ =26664
x
xy
xz
37775
e_1 =26664
1
0
0
37775
) $t(x, e_1)$ e_1 =26664
x 0 0
xy 0 0
xz 0 0
37775
(2.169)
La componente x è quella secondo x del vettore tensione agente sulla faccia di normale
x, ed è dunque una componente 'normale'; le componenti xy e xz sono quelle secondo
y e z del vettore tensione agente sulla faccia di normale x, e sono dunque componenti
'tangenziali'.
Analogamente, si ha:
$t(x, e_2)$ =26664
yx
y
yz
37775
e_2 =26664
0
1
0
37775
) $t(x, e_2)$ e_2 =26664
0 yx 0
0 y 0
0 yz 0
37775
(2.170)

$t(x, e_3)$ =26664
zx
zy
z
37775

e_3 =26664
0
0
1
37775
) $t(x, e_3)$ e_3 =26664
0 0 $_{zx}$
0 0 $_{zy}$
0 0 $_{z}$
37775
(2.171)
Pertanto la matrice associata al tensore T(x) in tale base è:
T(x) =26664
x yx zx
xy y zy
xz yz z
37775
(2.172)
ed è anche detta ‘matrice delle tensioni’.
Si consideri un cubetto elementare con le facce normali ai versori della base, dove a
meno di infinitesimi il valore di T si può assumere costante e pari al valore assunto al
centro del cubetto. In figura 2.18 sono rappresentate le componenti normali e tangenziali
agenti sulle facce di normali e_1, e_2 e e_3 del cubetto, ovvero le componenti del tensore
delle tensioni rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ = {i, j, k}.
e_3 = k
e_2 = j
e_1 = i
σ_y
σ_x
σ_z
τ_{xy}
τ_{yx}
τ_{zx}
τ_{zy}
τ_{xz}
e_3 = k
$t(x,e_2)$
$t(x,e_1)$
$t(x,e_3)$
e_2 = j
e_1 = i
σ_y
σ_x
σ_z
τ_{xy}
τ_{yx}
τ_{zx} τ_{yz}
τ_{zy}

τ_{xz}
τ_{yz}
(a) (b)
Figura 2.18: Visualizzazione delle tensioni agenti sulle facce di un cubetto elementare:
(a) visualizzazione solo delle componenti; (b) visualizzazione anche delle risultanti su
ciascuna faccia.

2.3.1 Equazioni differenziali di equilibrio

Si consideri un corpo qualsiasi B, che occupa il dominio , estratto dall'interno del
corpo B. Si fa l'ipotesi di continuità di b e di t in per cui si può utilizzare la (2.168).

L'equilibrio alla traslazione di B fornisce:
Z
b(x) d +Z@
t(x, n) dS = Z
b(x) d +Z@
T(x) n dS = 0 (2.173)
Utilizzando il teorema della divergenza 15 si ha:
Z
b(x) d +Z@
T(x) n dS = Z
b(x) d + Z
divT(x) d = 0 (2.177)
ovvero: Z
[b(x) + divT(x)] d = 0 (2.178)
Dovendo quest'ultima relazione essere valida per ogni dominio estratto da , si vede
facilmente che l'integrando deve essere nullo e che quindi deve aversi, identicamente:
b + divT = 0 (2.179)
La (2.178) è un'equazione differenziale vettoriale corrispondente a tre equazioni scalari.
Esse sono le 'equazioni differenziali di equilibrio' e si scrivono rispetto alla base {i, j, k}:
b_x +
@x
@x
+
@yx
@y
+
@zx
@z
= 0
b_y +
@xy
@x
+

$$\frac{\partial_{y}}{\partial y} + \frac{\partial_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$b_z + \frac{\partial_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial_{z}}{\partial z} = 0$$

(2.180)

Per avere un ulteriore riscontro fisico del significato delle (2.180) si sono riportate nella figura 2.19 le componenti della tensione in direzione x agenti sulle varie facce del cubetto elementare di lati dx, dy e dz. Si è anche riportata, in grigio, la risultante delle forze di volume in direzione x, pari al prodotto di b_x per il volume del cubetto dx dy dz.

Il tutto è a meno di infinitesimi di ordine superiore al volume del cubetto.

[15]Si ricorda che la divergenza di un campo tensoriale S è un campo vettoriale, indicato con div S, definito dalla seguente uguaglianza:

$$[\mathrm{div}\, S(x)] \cdot c \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{div}\, [S^t(x)\, c] \quad \forall c \text{ costante} \quad (2.174)$$

In componenti rispetto alla base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ si ha:

$$[\mathrm{div}\, S(x)]_i \cdot c_i = (S_{ij}\, c_i)_{/j} = S_{ij/j}\, c_i \quad (2.175)$$

da cui:

$$[\mathrm{div}\, S(x)]_i = S_{ij/j} \quad (2.176)$$

Le due facce ortogonali all'asse x hanno area pari a dy dz. Su quella di normale discorde a x agisce in direzione discorde a x la tensione $_x$, mentre su quella di normale concorde a x agisce in direzione concorde a x la tensione $_x+\partial_x/\partial x\, dx$. Tali tensioni vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per dy dz per avere le rispettive risultanti in direzione x.

Le due facce ortogonali all'asse y hanno area pari a dx dz. Su quella di normale discorde a y agisce in direzione discorde a x la tensione $_{xy}$, mentre su quella di normale concorde a y agisce in direzione concorde a x la tensione $_{xy}+\partial_{xy}/\partial y\, dy$. Tali tensioni vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per dx dz per avere le rispettive risultanti in direzione x.

Le due facce ortogonali all’asse z hanno area pari a dx dy. Su quella di normale
discorde a z agisce in direzione discorde a x la tensione xz, mentre su quella di normale
concorde a z agisce in direzione concorde a x la tensione xz+@xz/@z dz. Tali tensioni
vanno dunque moltiplicate, con il loro opportuno segno, per dx dy per avere le rispettive
risultanti in direzione x.

$\sigma_x +$

σ_x

6

6x

τ_{xy}

σ_x

$dA_x = dy\, dz$

$\tau_{x\ z} +$

τ_{xz}

6

6z

dz

$\tau_{x\ y} +$

τ_{xy}

6

6y

τ_{xz}

x

y

z

$dA_y = dx\, dz$

$dA_z = dx\, dy$

dx

dz

dy

dy

dx

$b_x\, dx\, dy\, dz$

Figura 2.19: Equilibrio alla traslazione in direzione x del cubetto elementare.

In definitiva, l’equilibrio alla traslazione del cubetto elementare si impone uguaglianG.

do a zero la somma tutte le risultanti in direzione x:

b_x dx dy dz+

$+_x +$

$@_x$

@x

dx − $_{x}$ dy dz
+$_{xy}$ +
@$_{xy}$
@y
dy − $_{xy}$ dx dz
+$_{xz}$ +
@$_{xz}$
@z
dz − $_{xz}$ dx dy = 0
(2.181)
Dividendo per il volume dx dy dz si ricava la prima delle (2.180). Le altre due equazioni
si ottengono imponendo in modo analogo l'equilibrio alla traslazione rispettivamente
in direzione y e z.

2.3.2 Simmetria del tensore delle tensioni

Analogamente a quanto si è fatto nella sezione precedente partendo dalla condizione di
equilibrio alla traslazione, imponendo il soddisfacimento dell'equilibrio alla rotazione
rispetto ad un polo qualsiasi per un qualsiasi corpo B estratto dall'interno di B si può
dimostrare che il tensore delle tensioni, in ogni punto, è simmetrico, ovvero che si ha:
T = T$_{t}$ (2.182)
Rispetto ad una qualsiasi base ortonormale la condizione di simmetria del tensore delle
tensioni equivale a quella di simmetria della matrice delle tensioni ad esso associata.
Pertanto, per la condizione di simmetria deve aversi:
$_{xy}$ = $_{yx}$ $_{yz}$ = $_{zy}$ $_{xz}$ = $_{zx}$ (2.183)
Per brevità non si dimostrerà la (2.182) ma per maggiore chiarezza ci si limiterà a
verificare la validità delle (2.183) nel caso particolare di uno stato tensionale costante
definito da un tensore T in cui le uniche componenti non nulle rispetto alla base
{i, j, k} sono $_{xy}$ e $_{yx}$:
T =26664
0 $_{yx}$ 0
$_{xy}$ 0 0
0 0 0
37775
(2.184)
In figura 2.20 è disegnato un cubetto visto in prospetto dalla parte della faccia di
normale z. Le risultanti della tensione tangenziale sulle facce di normali x e −x, di area
pari a y z, formano una coppia di braccio x che fornisce un momento antiorario
pari a ($_{xy}$y z)x. Le risultanti della tensione tangenziale sulle facce di normali y e
−y, di area pari a xz, formano una coppia di braccio y che fornisce un momento
orario pari a ($_{yx}$xz) y. Per l'equilibrio alla rotazione del cubetto tali due momenti

devono essere uguali e si ottiene:
$(_{xy} y\ z) x = (_{yx} x z)\ y$ (2.185)
e cioè deve aversi $_{xy} = _{yx}$.

τ_{xy}
τ_{yx}
x
y
τ_{yx}
Δy τ_{xy}
Δx
Figura 2.20: Verifica della simmetria di T in un caso particolare.
2.3.3 Condizioni ai limiti
In ogni punto della frontiera di si è detto che agiscono per ipotesi delle forze per unità
di superficie che sono state indicate con p. In particolare in un punto x di @ in cui tale
forza superficiale è nulla si ha p(x) = 0.
Prolungando per continuità la relazione (2.168) in un punto della frontiera di di normale uscente n si ottiene allora:
p(x) = T(x) n x 2 @ (2.186)
La (2.186) rappresenta le condizioni ai limiti, dette anche condizioni al contorno, che
devono essere soddisfatte dal campo tensoriale T per il soddisfacimento dell’equilibrio.
Esse, insieme alle equazioni differenziali ricavate nella sezione precedente, definiscono
per il modello continuo tridimensionale il problema dell’equilibrio.
E’ utile osservare che la relazione (2.186) può interpretarsi immaginando il piano
tangente alla frontiera nel punto x, di normale n, come una giacitura passante per x
(risultato di un ipotetico sezionamento) e dunque la forza superficiale applicata p(x)
come il vettore tensione agente su tale giacitura. Tale interpretazione è analoga a quella
per cui, nella modellazione monodimensionale delle travature, forze e coppie esterne
applicate sull’estremo libero di una trave forniscono direttamente le caratteristiche della
sollecitazione nel punto.
2.3.4 Componenti normale e tangenziali del vettore tensione su una giacitura
Si consideri un punto P di B di posizione x ed una giacitura per P di normale n. La
componente normale del vettore tensione t(x, n) = T(x) n è data da (figura 2.21):
$_n$ = T(x) n · n (2.187)

Dato un versore m ortogonale a n, la componente di t(x, n) nella direzione di m è
chiaramente una componente tangenziale e verrà indicata con $_{nm}$. Essa è fornita da
(figura 2.21):
$_{nm}$ = T(x) n ·m (2.188)
σ n
O
n n
m
τ nm**m**
t(x,n)
x
Figura 2.21: Componenti normale e tangenziale del vettore tensione.
Considerando poi la giacitura di normale m, la componente tangenziale secondo n
del vettore tensione t(x,m) si indicherà con $_{mn}$. Per la simmetria di T risulta:
$_{mn}$ = T(x)m· n = m· T(x) n = $_{nm}$ (2.189)

2.3.5 Tensioni principali e direzioni principali di tensione

Si definiscono ‘tensioni principali’ in un punto x gli autovalori del tensore della tensione
T = T(x) e ‘direzioni principali di tensione’ quelle dei corrispondenti autovettori.
Il calcolo delle tensioni principali e delle direzioni principali di tensione è perfettamente
analogo alla determinazione delle deformazioni principali e delle direzioni principali
di deformazione. Dunque un autovalore $_p$ di T ed il corrispondente autovettore
e_p sono soluzioni del seguente problema:
Te_p = $_p$ e_p () (T − $_p$ I) e_p = 0 (2.190)
che ammette soluzioni diverse da quella banale se e solo se
det(T − $_p$ I) = det26664
x − p xy xz
xy y − p yz
xz yz z − p
37775
= 0 (2.191)

cioè se e solo se $_p$ è soluzione della cosiddetta ‘equazione caratteristica’:
−3
p + I$_T$ 2
p + II$_T$ p + III$_T$ = 0 (2.192)
dove I$_T$, II$_T$ e III$_T$ rappresentano gli invarianti rispettivamente lineare, quadratico e
cubico del tensore della tensione e sono dati da:
I$_T$= trT = $_x$ + $_y$ + $_z$
II$_T$=
1
2
[tr (T$_2$) − (trT)$_2$]
III$_T$= detT

(2.193)
Se il versore e_p individua una direzione principale, la giacitura di normale e_p è caratterizzata
da un vettore tensione parallelo a e_p, che quindi non ha componenti tangenziali.
La componente normale $_n$ è invece pari proprio alla tensione principale $_p$ associata
ad e_p.

$\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_p) = \sigma_p \mathbf{e}_p$

O

$\mathbf{e}_p$

$\mathbf{x}$

Figura 2.22: Se e_p è direzione principale di tensione il vettore tensione è parallelo a e_p.

Essendo T simmetrico i suoi autovalori sono tutti reali. Calcolati gli autovalori risolvendo
la (2.192) le corrispondenti direzioni principali si ottengono sostituendo nella
(2.190) gli autovalori, uno per volta. Se essi sono tutti distinti, allora esiste una sola
terna di direzioni principali di tensione individuata dai versori e_{pi}, i = 1, 3. Se due
autovalori sono coincidenti, ovvero se l'equazione caratteristica ammette una radice di
molteplicità 2, allora esiste un piano contentente tutte direzioni principali di tensione, la
cui direzione ortogonale è anch'essa principale. Se gli autovalori sono tutti coincidenti
allora tutte le direzioni sono principali di tensione.
In ogni caso esiste almeno una base ortonormale di direzioni principali $\{e_{pi}\}$, i =
1, 2, 3. Rispetto a tale base la matrice associata al tensore della tensione è diagonale
e contiene quali termini della diagonale principale le tensioni principali. Rispetto alla

base $\{e_{pi}\}$ la matrice associata a T diventa quindi:

T =26664
$_{p1}$ 0 0
0 $_{p2}$ 0
0 0 $_{p3}$
37775
(2.194)

Nel caso in cui una tensione principale è nulla si parla di 'stato tensionale piano'
mentre se due tensioni principali sono nulle si parla di 'stato tensionale monoassiale'.
Calcolando il determinante utilizzando la rappresentazione diagonale (2.194)

detT = $_{p1}$ $_{p2}$ $_{p3}$ (2.195)

si vede che lo stato tensionale è piano o monoassiale se e solo se il determinante di T è
nullo.

2.4 Cerchi di Mohr

Si consideri uno stato tensionale in un punto P definito da un tensore T la cui matrice
associata alla base {i, j, k} è la seguente:
T =26664
$_{x}$ $_{xy}$ 0
$_{xy}$ $_{y}$ 0
0 0 $_{z}$
37775
(2.196)
Per semplicità di notazione si ometterà nel seguito di questa sezione la dipendenza dal
vettore posizione x.
Essendo nulle le componenti tangenziali $_{xz}$ e $_{yz}$ si deduce che z è direzione principale
ed il suo versore si indicherà con e_{p3}. La corrispondente tensione principale si
indicherà con $_{3}$ ed è proprio pari a $_{z}$. A tale risultato si perviene anche scrivendo
l'equazione caratteristica:
det(T − $_{p}$ I) = ($_{z}$ − $_{p}$) [($_{x}$ − $_{p}$) ($_{y}$ − $_{p}$) − ^{2}
$_{xy}$] (2.197)
che ammette chiaramente $_{z}$ quale una delle sue radici, corrispondente alla direzione
principale z.
Si consideri ora una normale n contenuta nel piano x, y, avente coseni direttori n_{x},
n_{y} e 0. Il corrispondente vettore tensione t(n) = Tn è allora contenuto ancora nel
piano x, y, come si deduce calcolandone la sua rappresentazione nella base {i, j, k}:
t(n) = Tn =26664
$_{x}$ $_{xy}$ 0
$_{xy}$ $_{y}$ 0
0 0 $_{z}$
37775
26664
n_{x}
n_{y}
0
37775
=26664
$_{x}$ n_{x} + $_{xy}$ n_{y}
$_{xy}$ n_{x} + $_{y}$ n_{y}
0
37775
(2.198)

Di seguito si ricava una rappresentazione grafica, molto usata nelle applicazioni, che
mostra come varia il vettore t nel piano x, y, al variare di n nel piano stesso. A tale
scopo conviene considerare le restrizioni dei vettori e dei tensori al piano x, y.

Detto
 l’angolo formato da n con l’asse x, assunto positivo se antiorario visto dalla
parte
positiva dell’asse z (figura 2.23), si avrà nel piano x, y e rispetto alla base {i, j}:
t(n) = t() =24
x xy
xy y
35
24
cos
sen 35 (2.199)
n
x
y
α
m
Figura 2.23: n nel piano x, y è univocamente definita dall’angolo formato con
l’asse
x.
Essendo ora:
x =
x + y
2
+
x − y
2
y =
x + y
2 −
x − y
2
(2.200)
si ottiene:
t()=24
t_x()
t_y()35 =0BB@
2664
x + y
2
0
0
x + y
2
3775
+2664
x − y
2
xy
xy −
x − y
2
3775

1CCA
24
cos
sen 35 =
= x + y
2 24
cos
sen 35 +26664
x − y
2 cos + xy sen
xy cos − x − y
2 sen
37775
=
= x + y
2 24
cos
sen 35 +24
cos sen
−sen cos 35
264
x − y
2
xy
375
=
= x + y
2 24
cos
sen 35 + R(−)264
x − y
2
xy
375
= s + d
(2.201)

e quindi:
t() = s + d (2.202)
dove:
s = x + y
2 24
cos
sen 35 d = R(−)264
x − y
2
xy
375
(2.203)
ed inoltre:
R(−) =24
cos sen

−sen cos 35 (2.204)
Entrambi i vettori s e d hanno modulo costante:
ksk =
x + y
2 kdk = sx − y
2 2
+ 2
xy (2.205)
n (α = 0) = **i**
x
y
σ − σ
2
x y
τ_{xy}
σ_y = −
σ + σ
2
x y σ − σ
2
x y
σ + σ
2
x y
σ_x = +
σ + σ
2
x y σ − σ
2
x y
s
d(α=0)
(α=0)
t (α=0)
Figura 2.24: Decomposizione di t in t = s + d per = 0.
Il vettore s è sempre parallelo a n. Quanto al vettore d, poiché la matrice R(−) è quella associata ad al tensore che ruota un vettore generico del piano di un angolo
 in senso orario se è positivo[16], d() si ottiene ruotando di tale angolo il vettore d(= 0), cioè il vettore avente componenti (x − y)/2 rispetto a x e xy rispetto a y.
[16]Si consideri ad esempio il vettore i =24
1
03 5. Si ha:
R(−) i =24
cos sen
−sen cos 35
24
1
035 =24
cos
−sen 35 (2.206)
che, rispetto sempre alla base {i, j}, definisce il vettore ottenuto da i mediante una rotazione di
 in senso

orario se è positivo.

n
x
y
$-\alpha$
$\sigma -\sigma$
2
x y
τ_{xy}
s
α **d**
(α)
(α)
t (α)
d$(\alpha=0)$
Figura 2.25: Decomposizione di t in t = s + d per 6= 0.
Nelle figure 2.24 e 2.25 sono rappresentate la decomposizione (2.202) per = 0 e
per 6= 0. In particolare, nel passaggio dalla figura 2.24 alla figura 2.25 i vettori n e
s sono ruotati di in senso antiorario mentre d è ruotato di in senso orario. Inoltre,
è bene sottolineare per quanto si dirà dopo, nelle figure 2.24 e 2.25 gli assi x e y sono
sempre quelli orizzontale e verticale, ovvero non sono ruotati.
Si consideri ora una nuova base definita da n e dal versore m ottenuto ruotando n di
/2 in senso antiorario (figura 2.23). Rispetto alla base {i, j} si ha:
m = 24
−sen
cos 35 (2.207)
Ruotando n di in senso antiorario, un osservatore solidale con la base {n,m}
vedrebbe n e s immobili, gli assi x e y ruotare di in senso orario e d ruotare di 2
in senso orario. Per verificare ciò, si indichi con t_0() il vettore numerico associato a
t() nella base {n,m}. La sua prima componente è la componente normale di t cioè
$_n$ mentre la seconda componente è evidentemente la componente tangenziale $_{nm}$. La
matrice di passaggio dalle componenti rispetto alla base {i, j} a quelle rispetto alla base
{n,m} è:
24
cos sen
−sen cos 35 = R(−) (2.208)

cioè è proprio la matrice R(−) ritrovata in precedenza. Risulta allora:
$t_0()$=24
n
nm
35
= R(−)24
$t_x()$
$t_y()$35 =
=24
cos sen
−sen cos 35
24
cos
sen 35 x + y
2 + R(−)R(−)264
x − y
2
xy
375
=
= x + y
2 24
1
035 + R(−)R(−)264
x − y
2
xy
375
(2.209)
Poiché si ha:
R(−)R(−)=24
cos sen
−sen cos 35
24
cos sen
−sen cos 35 =
=24
cos 2 − sen 2 2 sen cos
−2 sen cos cos 2 − sen 235 =
=24
cos (2) sen (2)
−sen (2) cos (2)35 = R(−2)
(2.210)
dove con R(−2) si è indicata la matrice associata ad un tensore che ruota un vettore
di 2 in senso orario se è positivo, si ottiene in definitiva:
$t_0()$ =24
n
nm
35
= x + y

2 24
1
035 + R(−2)264
x − y
2
xy
375
= s0 + d0() (2.211)
dove
s0 =264
x + y
2
0
375
d0() = R(−2)264
x − y
2
xy
375
(2.212)
La relazione (2.211) rappresenta la verifica analitica di quanto anticipato in precedenza.
Al variare di n si riconosce che s0, cioè il vettore numerico associato a s nella base {n,m}, rimane identico e solo la sua prima componente è diversa da zero. Il
vettore d0 ruota di −2 se n è ruotato di .
Il sistema di riferimento con origine nel punto P in esame ed assi paralleli rispettivamente
a n ed a m è detto 'riferimento di Mohr'. Al variare di n, ovvero dell'angolo ,

la (2.211) descrive nel riferimento di Mohr un cerchio di centro c = s0 e raggio R dati
da (figura 2.26):
c = s0 =264
x + y
2
0
375
R = sx − y
2 2
+ 2
xy (2.213)
Nel riferimento di Mohr sulle ascisse si legge la componente normale n del vettore
tensione e sulle ordinate si legge la componente tangenziale nm. Gli assi del riferimento
vengono pertanto indicati come assi n e nm.
$\sigma - \sigma$
2
x y
τ_{xy}

σ_y

$\sigma + \sigma$

2

x y

c = s'

P_x

σ_x

R

σ n

τ n m

Figura 2.26: Costruzione del cerchio di Mohr.

Per = 0 si ottiene il cosiddetto polo P_x del cerchio, sottolineando con il pedice x che il vettore t_0(= 0) rappresenta nel riferimento di Mohr il vettore tensione agente sulla giacitura di normale i, cioè parallela all'asse x.

Ruotando n di un angolo si è visto che nel riferimento di Mohr il vettore d_0() ruota di −2. Data allora una normale n come in figura 2.27, per ottenere il punto P_n estremo nel riferimento di Mohr del vettore t_0(n) = t_0(), si traccia da P_x la parallela a n e dall'intersezione di tale retta con il cerchio si traccia la retta orizzontale, ovvero la parallela a i. L'intersezione di quest'ultima con il cerchio fornisce il punto P_n cercato.

Infatti, se n forma un angolo con i, per la proprietà degli angoli al cerchio ed alla circonferenza allora il vettore d_0() forma con d_0(= 0) un angolo di −2 , cioè verifica la relazione $(2.212)_2$.

Riassumendo, la procedura appena illustrata, e descritta in figura 2.27, consente, assegnata una normale n, di trovare il punto del cerchio P_n estremo del vettore t_0(n) nel riferimento di Mohr. La procedura inversa consente invece di conoscere, assegnato un punto P_n del cerchio, cioè un vettore t_0 con estremo sul cerchio, la normale n del piano corrispondente, ovvero tale che t_0 = t_0(n). Tale procedura inversa consiste dunque nel tracciare dal punto P_n una retta orizzontale e dall'intersezione di questa con il cerchio

τ_{xy}

σ_y

P_x

σ_x

σ n

τ n m

i

n
t'(i) = **t'**(α=0)
d'(α=0)
t'(n) = **t'**(α) **d'**(α)
α
α
-2α
P_n
Figura 2.27: Costruzione grafica della corrispondenza tra n e P_n sul cerchio di Mohr.
la congiungente con il punto P_x. Quest'ultima retta è parallela alla normale n, che è
quindi definita in direzione ma non in verso. D'altra parte i vettori t(n) e t(−n) = −t(n) corrispondono allo stesso vettore t_0 nel riferimento di Mohr. Infatti −n si ottiene
ruotando n di , per cui il vettore $d_0(-n)$ si ottiene da $d_0(n)$ mediante una rotazione di
−2 , per cui $d_0(-n) = d_0(n)$ e quindi $t_0(-n) = t_0(n)$.
In alcuni testi si utilizza una rappresentazione leggermente diversa per la quale viene
assunto quale punto del cerchio corrispondente ad una normale n il punto P_{0n} simmetrico
di quello P_n ricavato in precedenza. Il punto P_{0n} si ottiene allora tracciando dallo stesso
polo P_x introdotto in precedenza, cioè dal punto di ascissa $_x$ ed ordinata $_{xy}$, una retta
parallela alla giacitura di normale n. Infatti dalla figura 2.28 si riconosce che, essendo
l'angolo QP_nP_{0n} pari a /2, il segmento QP_{0n} è un diametro del cerchio. Quindi anche
l'angolo QP_xP_{0n} è pari a /2, per cui il segmento $P_{0n}P_x$ è ortogonale alla normale n.

2.4.1 I tre cerchi principali e l'arbelo di Mohr

Poiché si è fatta variare la normale n in un piano principale, in questo caso ortogonale
all'asse z = che è principale, la componente $_{nm}$ rappresenta l'intera componente
tangenziale del vettore tensione t(n). Pertanto i due punti intersezione del cerchio con
l'asse delle ascisse, corrispondenti a valori nulli della $_{nm}$, corrispondono a due normali
per le quali la componente tangenziale del vettore tensione è nulla, ovvero alle altre
due direzioni principali e di versori e_{p1} ed e_{p2}. I corrispondenti valori della $_n$
rappresentano dunque le due altre tensioni principali $_1$ e $_2$ (figura 2.29) date da:

τ_{xy}
σ_y
P_x

σ_x
σ_n
τ_{nm}
i
n α
Q P_n
P_n'
Giacitura di
normale **n**
Retta parallela
alla giacitura di
normale **n**
Retta parallela
a **n**
Figura 2.28: Costruzione grafica della corrispondenza tra n e P_{0n} sul cerchio di Mohr.
1
2
9=;
=
$_x + _y$
2 $\pm$s$_x - _y$
2 $_2$
+ $_2$
$_{xy}$ (2.214)
τ_{xy}
σ_y
P_x
σ_x
σ_n
τ_{nm}
ep1
ep2
σ_2 σ_1
Figura 2.29: Determinazione grafica delle tensioni principali e delle direzioni principali
di tensione.

La costruzione del cerchio di Mohr può ripetersi facendo variare la normale n negli
altri due piani principali , e , . Si ottengono altri due cerchi uno dei quali dovrà passare per i punti di ordinata nulla ed ascisse $_1$ e $_3$ ed un altro per i punti di ordinata
nulla ed ascisse $_2$ e $_3$. I tre cerchi così ottenuti sono detti cerchi principali di Mohr e
sono a due a due tangenti fra loro (figura 2.30). Il centro del cerchio principale intersecante
sulle ascisse le tensioni principali $_i$ e $_j$ è stato indicato in figura con C_{ij}, ed analogamente si è fatto per gli altri due cerchi.

Considerando una normale qualsiasi, cioè anche non contenuta in un piano principale,
si consideri il punto P_n nel riferimento di Mohr avente quale ascissa il valore della
componente normale di t(n), cioè $_n$ = Tn · n e quale ordinata il modulo k $_n$k del
vettore componente tangenziale $_n$ = t(n) − $_n$ n. Si dimostra che al variare di n il
punto P_n è sempre non esterno all'area campita in figura 2.30, detta 'arbelo' di
Mohr.

σ_n

τ_{nm}

$\sigma_i \sigma_j \quad \sigma_k C_{ij} C_{ik} C_{jk}$

Figura 2.30: Cerchi principali di Mohr e arbelo di Mohr (i 6= j 6= k 6= i).

2.5 Lavoro virtuale interno

Si estragga dal corpo B, nella configurazione , un cubetto elementare con gli spigoli
paralleli agli assi x, y e z di lato l = x = y = z e si supponga che tale cubetto
sia caratterizzato da uno stato tensionale uniforme e monoassiale definito, nella base
{i, j, k}, dalla matrice:

T = 26664

$_x$ 0 0

0 0 0

0 0 0

37775

(2.215)

Sulle due facce del cubetto di normali i e −i, di area pari a A_x = y z, agisce dunque
una tensione normale uniforme pari a $_x$ (figura 2.31).

σ_x

x

y

Δy

Δx

σ_x **i**

Figura 2.31: Lavoro interno: sistema di forze interne.

Si consideri ora lo stesso cubetto caratterizzato da uno stato di deformazione uniforme
e monoassiale definito, nella base {i, j, k}, dalla matrice:

E = 26664

"$_x$ 0 0

0 0 0

0 0 0

37775

(2.216)

Il corrispondente spostamento relativo fra le due facce del cubetto di normali i e −i e
dato da (figura 2.32):

l_x = "$_x$ x (2.217)

x

y

Δy
Δx
i
$(1+\varepsilon_x)\Delta x$

Figura 2.32: Lavoro interno: sistema di deformazioni.

Si supponga che non esista nessuna relazione di causa-effetto fra il sistema di forze interne definito dalla (2.215) ed il sistema di deformazioni definito dalla (2.216). Il lavoro compiuto dalla tensione $_x$ sulle facce di normale i e −i per lo spostamento relativo (2.217) fra le due facce è dunque un lavoro virtuale e vale:

$L_{i,x} = ({}_x A_x)\, l_x = {}_x\, "_x\, x(y\, z) = {}_x\, "_x\, V$ (2.218)

dove con V = xy z si è indicato il volume del cubetto.

Considerando stati monoassiali dati dalle (2.215) e (2.216) ma non necessariamente costanti, si può approssimare tali campi tensoriali con campi costanti in cubetti elementari di volume V , effettuare la sommatoria di tutti i termini ottenuti scrivendo in ciascun cubetto la (2.218) e calcolare il limite per un numero crescente di cubetti con V ! 0, mediante la ben nota procedura di integrazione dell’analisi. Si chiarisce in tal modo che l’espressione del lavoro virtuale interno $L_{i,x}$, nel caso di stati monoassiali di tensione e deformazione in direzione x, è la seguente:

$L_{i,x} = Z$
${}_x\, "_x$ d (2.219)

Un ragionamento analogo può farsi per le altre componenti di tensione e si può dimostrare che, nel caso generale di stati tensionali e di deformazione qualsiasi, il lavoro virtuale interno assume l’espressione:

$L_i = Z_V$
$({}_x\, "_x + {}_y\, "_y + {}_z\, "_z + {}_{xy}\, {}_{xy} + {}_{yz}\, {}_{yz} + {}_{xz}\, {}_{xz})$ d (2.220)

Poiché $_x = T_{11}$, $_y = T_{22}$, $_z = T_{33}$, $_{xy} = T_{12}$, $_{yz} = T_{23}$, $_{xz} = T_{13}$, ed inoltre $"_x = E_{11}$, $"_y = E_{22}$, $"_z = E_{33}$, $_{xy} = 2E_{12}$, $_{yz} = 2E_{23}$, $_{xz} = 2E_{13}$, la (2.220) si può anche scrivere:

$L_i = Z$
$(T_{11} E_{11}+T_{22} E_{22}+T_{33} E_{33}+2\, T_{12} E_{12}+2\, T_{23} E_{23}+2\, T_{13} E_{13})$ d (2.221)

Poiché poi, per la simmetria di T e di E, risulta $T_{12} = T_{21}$, $T_{23} = T_{32}$, $T_{13} = T_{31}$ ed inoltre $E_{12} = E_{21}$, $E_{23} = E_{32}$, $E_{13} = E_{31}$, la (2.221) si può ancora scrivere:

$L_i = Z$
$(T_{11} E_{11} + T_{22} E_{22} + T_{33} E_{33} + T_{12} E_{12} + T_{21} E_{21} + T_{23} E_{23}+$
$+T_{32} E_{32} + T_{13} E_{13} + T_{31} E_{31})$ d
(2.222)

cioè:

$L_i = Z$
T E d (2.223)

dove T E indica il prodotto scalare fra i due tensori T ed E, che si calcola come somma dei prodotti delle componenti omologhe, in analogia con quanto avviene per il prodotto scalare fra vettori.

2.6 Legame elastico

La relazione esistente fra la deformazione dell'intorno di un punto e lo stato tensionale agente nel punto stesso di un modello continuo tridimensionale è detta 'legame costitutivo' del modello. Il legame costitutivo più efficace da adottare nella modellazione matematica di un problema strutturale dipende dal materiale in esame e dal tipo di analisi che si vuole svolgere. In questa sezione si studierà il legame elastico lineare, ovvero il più semplice dei legami costitutivi, che ben schematizza il comportamento di molti dei materiali correntemente utilizzati nelle applicazioni strutturali dell'ingegneria solo per valori limitati dello stato tensionale e deformativo, come si vedrà in modo più dettagliato nella sezione sui criteri di resistenza. Tuttavia la progettazione tende quasi sempre a far sì che i valori della tensione e della deformazione rientrino in tali limiti.

Si faranno inoltre le ipotesi di piccolezza degli spostementi[17] e di isotropia del materiale.

Tralasciando per semplicità una definizione matematicamente rigorosa di isotropia, una definizione più euristica ma indubbiamente efficace è quella per cui un materiale è isotropo quando il suo comportamento è identico in tutte le direzioni. Dal punto di vista sperimentale un provino cubico di materiale omogeneo[18] ed isotropo sottoposto ad una prova meccanica fornisce risultati identici comunque esso venga orientato nella macchina di prova.

Si consideri un cilindro di materiale soggetto ad uno stato di tensione monoassiale uniforme nella direzione 1, ovvero caratterizzato in ogni punto dal tensore:

T =26664
${}_1$ 0 0
0 0 0
0 0 0
37775
(2.224)

E' evidente che la direzione 1 è principale e che tutte le direzioni ad essa ortogonali sono anche principali.

Si assuma che il cilindro sia anche omogeneo. Nel caso di comportamento elastico

lineare si ritrova uno stato di deformazione caratterizzato da una dilatazione lineare in
direzione 1 uniforme e data da (figura 2.33):
"$_1$ =
1
E
(2.225)
e da una dilatazione lineare "$_t$ uguale in ogni direzione ortogonale a 1 e pari a:
"$_t$ = "$_2$ = "$_3$ = − "$_1$ = −
1
E
(2.226)

[17]A stretto rigore, per la validità del comportamento elastico lineare basterebbe l'ipotesi di 'piccole
deformazioni', ovvero che le dilatazioni lineari e gli scorrimenti siano molto inferiori all'unità, che non
implica necessariamente il fatto che gli spostamenti siano piccoli. Si pensi ad esempio ad un moto
rigido (non infinitesimo) di un corpo, in cui le deformazioni sono addirittura nulle e gli spostamenti
invece possono essere molto grandi. Tuttavia l'ipotesi di piccoli spostamenti è comoda per la trattazione
perché consente di descrivere le deformazione mediante il tensore della deformazione infinitesima e la
sua rimozione introdurrebbe complessità ben lontane dagli scopi della presente trattazione.

[18]L'ipotesi di isotropia non va confusa con quella di omogeneità, per la quale il materiale è caratterizzato
dalle stesse proprietà in ciascun punto. Si osservi che un corpo continuo può avere un comportamento
omogeneo e isotropo, omogeneo ed anisotropo, isotropo e disomogeneo, disomogeneo ed anisotropo.

σ_1
1
Δy
Δx
σ_1
cubetto indeformato
cubetto deformato
(1+ε_1)Δ x
(1−ν ε_1)Δy
2

Figura 2.33: stato di tensione monoassiale in direzione 1.

Il modulo E è detto 'modulo di Young' ed ha le dimensioni [E] = [F L^{-2}]. Il coefficiente
 è detto 'rapporto' o anche 'coefficiente di Poisson' ed è adimensionale.
Si riscontrano inoltre scorrimenti nulli tra le direzioni 1, 2 e 3. Pertanto il tensore
della deformazione infinitesima associato a T è dato da:
E =
1
E
26664
$_1$ 0 0
0 − $_1$ 0
0 0 − $_1$

37775
(2.227)
La relazione (2.227), scritta con riferimento ad uno stato di tensione costante, viene
assunta anche nel caso di stato tensionale variabile quale relazione puntuale tra uno stato
di tensione monoassiale ed il corrispondente tensore della deformazione infinitesima, ed
anche se il materiale non è omogeneo[19].
Poiché l’ipotesi di isotropia del materiale equivale ad assumere un comporamento
uguale in ciascuna direzione, due stati monoassiali rispettivamente nelle direzioni 2 e 3
conducono a due tensori della deformazione infinitesima analoghi a quello della (2.227):
T = 26664
0 0 0
0 2 0
0 0 0
37775
) E =
1
E
26664
− 2 0 0
0 2 0
0 0 − 2
37775
(2.228)
T = 26664
0 0 0
0 0 0
0 0 3
37775
) E =
1
E
26664
− 3 0 0
0 − 3 0
0 0 3
37775
(2.229)
Si sottolinea in particolare che per l’ipotesi di isotropia il modulo di Young ed il coefficiente
di Poisson non dipendono dalla direzione dello stato monoassiale.
[19]Se il materiale non è omogeneo E e cambiano da punto a punto.

Si consideri ora uno stato di sollecitazione definito nella base principale dalla matrice:
T =26664
1 0 0

0 $_2$ 0
0 0 $_3$
37775
(2.230)
Riguardando tale stato di tensione come sovrapposizione di tre stati monoassiali ed in
virtù del principio di sovrapposizione degli effetti il legame elastico associa a tale stato
tensionale i seguenti valori delle dilatazioni lineari e degli scorrimenti:
"$_1$ =
1
E
[$_1$ − ($_2$ + $_3$)]
"$_2$ =
1
E
[$_2$ − ($_1$ + $_3$)]
"$_3$ =
1
E
[$_3$ − ($_1$ + $_2$)]
$_{12}$ = $_{23}$ = $_{13}$ = 0
(2.231)
Aggiungendo e sottraendo $_i$ nell'espressione della dilatazione lineare "$_i$ si ottiene
ancora:
"$_1$ =
1 +
E
$_1$ −

E
($_1$ + $_2$ + $_3$)
"$_2$ =
1 +
E
$_2$ −

E
($_1$ + $_2$ + $_3$)
"$_3$ =
1 +
E
$_3$ −

E
($_1$ + $_2$ + $_3$)
$_{12}$ = $_{23}$ = $_{13}$ = 0
(2.232)
ovvero:
26664
"$_1$

1
2 12
1
2 13
1
2 12 "2
1
2 23
1
2 13
1
2 23 "3
37775
=
1 +
E
26664
1 0 0
0 2 0
0 0 3
37775
−

E
(trT)26664
1 0 0
0 1 0
0 0 1
37775
(2.233)

che in modo tensionale intrinseco, cioè indipendente dalla base scelta, può scriversi:

E =
1 +
E
T −

E
(trT) I (2.234)

La relazione (2.234) definisce completamente il legame elastico lineare isotropo. Si riconosce dunque che in tali ipotesi il legame costitutivo dipende solo da due costanti, che vanno ricavate sperimentalmente. Nella tabella 2.1 sono riportati alcuni valori di E e di per alcuni materiali molto utilizzati in ingegneria strutturale.

Materiale	E (MPa)	
Acciaio	(2.0 ÷ 2.1) × 10^5	0.25 ÷ 0.33
Alluminio	6.6 × 10^4	0.36
Calcestruzzo	(2 ÷ 4) × 10^4	0.1 ÷ 0.15
Tufo	(3 ÷ 15) × 10^3	0.1 ÷ 0.15

Tabella 2.1: Valori del modulo di Young E e del rapporto di Poisson per alcuni materiali.

In una base non principale {i, j, k} la relazione (2.234) fornisce il seguente

legame
fra le matrici della deformazione e della tensione:
26664
"x
1
2 xy
1
2 xz
1
2 xy "y
1
2 yz
1
2 xz
1
2 yz "z
37775
=
1 +
E
26664
x xy xz
xy y yz
xz yz z
37775
−

E
(trT)26664
1 0 0
0 1 0
0 0 1
37775
(2.235)
ovvero le seguenti relazioni fra le componenti di deformazione e di tensione:
"x =
1 +
E
x −

E
(x + y + z)
"y =
1 +
E
y −

E
(x + y + z)
"z =
1 +
E
z −

E

(x + y + z)
xy =
2 (1 +)
E
xy =
xy
G
yz =
2 (1 +)
E
yz =
yz
G
xz =
2 (1 +)
E
xz =
xz
G
(2.236)
dove G è detto modulo di ‘elasticità tangenziale’ ed è legato ad E ed a dalla relazione:
G =
E
2 (1 +)
(2.237)
Per ricavare la relazione inversa della (2.234), cioè la relazione che fornisce il tensore
della tensione T in funzione del tensore della deformazione infinitesima E, si calcoli la

traccia di ambo i membri della (2.234):
trE =
1 +
E
trT −
3
E
trT =
1 − 2
E
trT (2.238)
dove si è utilizzata la relazione tr I = 3, facilmente ottenibile calcolando la traccia della
matrice identica. Dalla (2.238) si ricava:
trT =
E
1 − 2
trE (2.239)
Il rapporto fra trT e trE, è spesso indicato con k
k =
trT

trE
=
E
1 − 2
, (2.240)
ed è detto ‘modulo di elasticità volumetrico’ in quanto è il rapporto fra la somma delle
tensioni normali agenti su tre facce ortogonali del cubetto elementare e la dilatazione
volumetrica , che nell’ipotesi qui fatta di piccoli spostamenti è proprio pari a trE
(formula (2.136)).
Sostituendo la (2.239) nella (2.234) si ottiene:
E =
1 +
E
T −

E E
1 − 2 (trE) I =
1 +
E
T −

1 − 2
(trE) I (2.241)
Da quest’ultima relazione, ricordando anche la (2.237), si ricava:
T = 2GE + (trE) I (2.242)
dove
=
E
(1 +) (1 − 2)
(2.243)
Le costanti G e sono anche note come ‘costanti di Lamé’. In componenti si ottiene:
$_x$ = (2G +) "$_x$ + ("$_y$ + "$_z$)
$_y$ = (2G +) "$_y$ + ("$_x$ + "$_z$)
$_z$ = (2G +) "$_z$ + ("$_x$ + "$_y$)
$_{xy}$ = G$_{xy}$ $_{yz}$ = G$_{yz}$ $_{xz}$ = G$_{xz}$
(2.244)

2.6.1 Espressioni matriciali del legame elastico

Le relazioni (2.234) e (2.242), che esprimono in forma intrinseca il legame elastico
fra T ed E nelle due forme una inversa dell’altra possono essere scritte mediante
l’introduzione di un tensore del quarto ordine D:
T = DE E = D^{-1} T (2.245)

Invece di ricavare le espressione del tensore D, conviene riscrivere le (2.236) e
(2.244) in modo compatto mediante la seguente notazione matriciale:
266666666666666664
"$_x$

"y
"z
xy
yz
xz
377777777777777775
=
266666666666666666666666664
1
E −

E −

E
0 0 0
−

E
1
E −

E
0 0 0
−

E −

E
1
E
0 0 0
0 0 0
1
G
0 0
0 0 0 0
1
G
0
0 0 0 0 0
1
G
377777777777777777777777775
266666666666666664
x
y
z
xy
yz
xz
377777777777777775
(2.246)
266666666666666664

x
y
z
xy
yz
xz
37777777777777775
=
26666666666666664
2G +   0 0 0
 2G +   0 0 0
  2G + 0 0 0
0 0 0 G 0 0
0 0 0 0 G 0
0 0 0 0 0 G
37777777777777775
26666666666666664
"x
"y
"z
xy
yz
xz
37777777777777775 (
2.247)

2.6.2 Energia elastica

Si consideri ora il cubetto elementare soggetto ad uno stato di tensione monoassiale
unforme in direzione x e caratterizzato dal tensore di deformazione ad esso associato
mediante il legame elastico:
T =26664
x 0 0
0 0 0
0 0 0
37775)
E
=
1
E
26664
x 0 0
0 − x 0
0 0 − x
37775
(2.248)
In particolare la relazione esistente fra la componente x e la componente "x è la seguente:
x = x("x) = E "x (2.249)
Si consideri ora l'evoluzione della "x dal valore nullo iniziale ad un valore finale "x.
Dalla (2.249) si deduce che la tensione x varierà anch'essa da un valore nullo

iniziale
ad un valore finale pari a x = E "x.

Quando, in un istante generico del processo di deformazione, la dilatazione assume
il valore "x il lavoro realmente compiuto dalla tensione per il successivo incremento di
deformazione d"x vale:
d(Ldef,x) = x("x) d"x V (2.250)
essendo ancora V il volume del cubetto. Nel termine d(Ldef,x) d indica che il termine
a secondo membro è il lavoro compiuto nell'incremento infinitesimo di deformazione,
mentre indica che il lavoro è compiuto nel cubetto elementare. Nell'intero processo
deformativo tra il valore iniziale nullo ed il valore finale il lavoro complessivamente
compiuto dalla tensione nel cubetto elementare vale:
Ldef,x=0@Z0
"x
x("x) d"x1A V =0@Z0
"x
E"x d"x1A V =
=
1
2
E "2
x V =
1
2
x "x V
(2.251)
ed è pari all'area triangolare campita in figura 2.34 moltiplicata per V .
εx
σx
σx
εx
Figura 2.34: Lavoro di deformazione per uno stato monoassiale.
Con il solito processo di integrazione si ottiene che, per uno stato monoassiale, il
lavoro complessivamente compiuto dalla tensione, nell'intero processo deformativo dal
valore iniziale nullo di "x al valore finale "x, vale per l'intero corpo:
Ldef,x =
1
2 Z
E "2
x d =
1
2 Z
x "x d (2.252)
Un ragionamento analogo può farsi per le altre componenti di tensione e si può dimostrare

che nel caso generale il lavoro complessivamente compiuto dalla tensione,
nell'intero processo deformativo dal valore iniziale nullo di E ad un valore finale
E,
vale per l'intero corpo:
L_{def} =
1
2 Z
DE E d =
1
2 Z
T E d (2.253)

con T = 2GE + (trE) I. Tale lavoro è detto 'lavoro di deformazione'.
Una caratteristica molto importante del legame elastico è che esso è
conservativo.
Ciò vuol dire che il lavoro di deformazione (2.253) è indipendente dal percorso
deformativo
e dipende solamente dai valori iniziali e finali delle deformazioni e delle
tensioni.
Nella teoria del potenziale si dimostra che tale ipotesi di conservatività
equivale all'esistenza
di una funzione di E, detta 'energia elastica specifica' o anche 'potenziale
elastico', tale che:
L_{def} = Z
(E) d (2.254)
Dal confronto con la (2.253) si ricava l'espressione del potenziale elastico:
(E) =
1
2
DE E =
1
2
T E (2.255)
La conservatività del legame elastico si traduce dunque nel fatto che il lavoro
di
deformazione viene immagazzinato sotto forma di 'energia elastica'.

2.6.3 Limiti di validità per le costanti elastiche

Dalla relazione (2.249), valida nel caso di stato tensionale monoassiale, si
deduce che
per avere $_x$ e "$_x$ dello stesso segno, in modo che a dilatazione positiva
corrisponda una
tensione di trazione e ad una contrazione corrisponda una compressione, il
modulo di
E deve essere positivo. Dalla relazione (2.252) si vede anche che la condizione
E > 0
può essere ricavata dall'altra, fisicamente ragionevole, che l'energia elastica
sia definita
positiva, cioè sia positiva per valori non nulli di E.
Con ragionamenti analoghi si deduce dalle ultime tre delle (2.244) e dalla
(2.240)
che deve aversi G > 0 e k > 0. Le tre condizioni su E, G e k impongono dei

limiti
teorici al valore di . Infatti si ha:

$G > 0)$
E
$2 (1 +)$
$> 0) \ > -1$
$k > 0)$
E
$(1 - 2)$
$> 0) \ <$
1
2
(2.256)

e quindi:

$-1 < \ <$
1
2
(2.257)

I limiti definiti nella (2.257) sono detti teorici in quanto valori negativi di sono stati ottenuti solo in laboratorio. Tutti i materiali utilizzati nella grande maggioranza delle applicazioni ingegneristiche presentano valori di non negativi.

2.7 Criteri di resistenza

L'ipotesi di comportamento elastico lineare risulta valida per valori limitati dello stato tensionale. Oltre una certa soglia il modello matematico deve tener conto dei fenomeni

di plasticizzazione e di frattura nel materiale. In questa sezione si studieranno alcuni criteri, detti 'criteri di resistenza', utilizzati per definire il cosiddetto dominio elastico, costituito dall'insieme degli stati tensionali per i quali risulta valida l'ipotesi di elasticità lineare.

Si parte dall'analisi dei risultati di una prova di trazione su una barra di acciaio dolce, quali quelle che si utilizzano per le armature di rinforzo del calcestruzzo armato (figura 2.35).

F

Figura 2.35: Prova di trazione di una barra di acciaio dolce.

Per effetto della forza di trazione F applicata si ottiene uno stato tensionale monoassiale con l'unica tensione principale non nulla pari a = F/A, essendo A l'area della sezione trasversale della barra. Misurando la dilatazione lineare " nella direzione longitudinale si ottiene un diagramma − " simile a quello riportato in figura

2.36. Si riconosce un primo ramo elastico lineare, la cui pendenza fornisce il valore del modulo di Young del materiale, fino ad un valore $_{y}$ della tensione, detto tensione di snervamento, ed un corrispondente valore "$_{y}$ della deformazione. Segue un ramo pressoché piatto del diagramma in cui la deformazione aumenta per un valore praticamente costante della tensione pari a $_{y}$. Si riscontra poi un successivo incrudimento del materiale e quindi la rottura.

ε_y

σ_y

α

tang α = E

ε_p

σ

ε

B

A

C

D

rottura

Figura 2.36: Curva − " per una barra di acciaio dolce.

La deformazione "$_{y}$ per un acciaio duro è dell’ordine di 0.001 − 0.002 ed il corripondente valore della tensione di snervamento dell’ordine di 200 − 400 MPa. Il ramo BCD della curva corriponde alla parte della prova in cui all’interno del materiale si hanno grandi deformazioni plastiche. Scaricando il provino in questa fase si rileva una pendenza in fase di scarico praticamente uguale a quella misurata in fase elastica e, per = 0, un valore residuo di deformazione corrispondente alla deformazione plastica

irreversibile "$_{p}$ che si è avuta fino a quel punto durante il carico. La rottura si ha per valori della deformazione plastica dell’ordine di 0.2, ovvero del 20%.

Per altri materiali prove di trazione e di compressione in regime monoassiale forniscono risultati qualitativamente e quantitavemente piuttosto diversi e si tralascia in questa sede un studio approfondito di tali aspetti. Ci si limita a sottolineare che per la maggior parte dei materiali è possibile, attraverso delle prove in regime monoassiale, definire dei valori limite delle tensioni a trazione $_{t}$ ed a compressione $_{c}$ ed un intervallo [−$_{c}$, $_{t}$] entro il quale si può assumere valida l’ipotesi di comportamento elastico lineare. Tale intervallo rappresenta il dominio elastico nel caso di uno stato tensionale monoassiale.

Si definisce ‘criterio di resistenza’ un criterio con il quale, a partire dall’intervallo [−$_c$, $_t$] valido per stati monoassiali, si definisce un dominio elastico nello spazio delle tensioni, ovvero dei tensori simmetrici del secondo ordine. Si prenderanno in considerazione materiali isotropi, per i quali il dominio elastico può esprimersi mediante una funzione f, detta ‘funzione di plasticizzazione’, che dipende solamente dalle tensioni principali $_1$, $_2$, $_3$ del tensore delle tensioni, e non dalle rispettive direzioni principali.

In altre parole due stati tensionali aventi diverse direzioni principali ma tensioni principali uguali sono equivalenti ai fini dell’appartenenza o meno al dominio elastico. Lo studio dei criteri di resistenza isotropi può dunque condursi con riferimento allo spazio tridimensionale delle tensioni principali. Per i criteri che si studieranno il dominio elastico è un insieme convesso di tale spazio che contiene al suo interno l’origine, ovvero lo stato tensionale nullo.

Un stato tensionale è interno al dominio elastico se si ha:

f($_1$, $_2$, $_3$) < 0 (2.258)

L’equazione

f($_1$, $_2$, $_3$) = 0 (2.259)

definisce la frontiera del dominio elastico, detta anche ‘superficie di plasticizzazione’.

Per l’ipotesi di isotropia l’ordine degli argomenti di f non ha influenza sul valore della funzione e dunque deve aversi:

f($_1$, $_2$, $_3$) = f($_1$, $_3$, $_2$) = f($_3$, $_1$, $_2$) = . . . (2.260)

2.7.1 Criteri di resistenza per materiali duttili

I materiali duttili sono caratterizzati da valori elevati della deformazione plastica prima della rottura e tipicamente manifestano valori molto simili, che spesso si assumono coincidenti, delle tensioni limite a trazione e a compressione $_t$ e $_c$ in prove monoassiali.

In tal senso essi sono materiali ‘isoresistenti’ e per essi si può definire un unico valore limite $_o$ = $_t$ = $_c$.

In tali materiali il superamento del limite elastico si accompagna a scorrimenti plastici che si hanno a causa del raggiungimento di valori di soglia delle tensioni tangenziali su alcune giaciture. Molto utilizzati nelle applicazioni sono i criteri di ‘Tresca’ e di ‘von Mises’.

Criterio di Tresca

Secondo il criterio di Tresca si ha plasticizzazione in un punto quando la
massima tensione
tangenziale $_{max}$ in quel punto raggiunge un valore limite. Dalla teoria dei cerchi
di Mohr si ricava (figura 2.37) che la tensione tangenziale massima è pari al
raggio del
cerchio principale massimo di Mohr, ovvero:
$_{max}$ = max|$_1$ − $_2$|
2
, |$_2$ − $_3$|
2
, |$_3$ − $_1$|
2 (2.261)
e l'equazione della superficie di plasticizzazione è:
f($_1$, $_2$, $_3$) = max|$_1$ − $_2$|
2
, |$_2$ − $_3$|
2
, |$_3$ − $_1$|
2 − c = 0 (2.262)
σ n
τ n m
σ i σj σ k
τ m ax
Figura 2.37: Determinazione della tensione tangenziale massima $_{max}$ mediante i
cerchi
di Mohr.
La costante c si determina imponendo che nello stato monoassiale in cui $_1$ = $_o$,
$_2$ = $_3$ = 0, ovvero in corrispondenza del limite di plasticizzazione, risulti f = 0,
ovvero:
f($_o$, 0, 0) =
$_o$
2 − c = 0) c =
$_o$
2
(2.263)
Sostituento nella (2.262) e semplificando si ottiene la condizione di
plasticizzazione
secondo Tresca:
max {|$_1$ − $_2$|, |$_2$ − $_3$|, |$_3$ − $_1$|} = $_o$ (2.264)
Introducendo una tensione scalare equivalente $_{eq}$, che per il criterio di Tresca è
data
da:
$_{eq}$ = max {|$_1$ − $_2$|, |$_2$ − $_3$|, |$_3$ − $_1$|} (2.265)
la condizione di plasticizzazione di Tresca può anche scriversi come segue:
$_{eq}$ = $_o$ (2.266)

Criterio di von Mises
Secondo il criterio di von Mises la plasticizzazione avviene quando la media
quadratica
delle tre tensioni tangenziali massime nei tre piani principali raggiunge un
valore limite.

L’equazione della superficie di plasticizzazione si scrive allora come segue:
f($_1$, $_2$, $_3$) =
1
3 s$_1$ − $_2$
2 $_2$
+ $_2$ − $_3$
2 $_2$
+ $_3$ − $_1$
2 $_2$
− c = 0 (2.267)
La costante c si determina ancora imponendo che nello stato monoassiale in cui $_1$ = $_o$,
$_2$ = $_3$ = 0 risulti f = 0, ovvero:
f($_o$, 0, 0) =
1
3 r$_2$
$_o$
4
+
$_2$
$_o$
4 − c =
$_o$
3p2 − c = 0) c =
$_o$
3p2
(2.268)
Sostituendo nella (2.267), sviluppando i quadrati sotto la radice quadrata e semplificando
si ottiene la condizione di plasticizzazione secondo von Mises:
q$_2$
$_1$ + $_2$
$_2$ + $_2$
$_3$ − $_1$ $_2$ − $_2$ $_3$ − $_3$ $_1$ = $_o$ (2.269)
Introducendo la tensione scalare equivalente $_{eq}$ secondo von Mises:
$_{eq}$ = q$_2$
$_1$ + $_2$
$_2$ + $_2$
$_3$ − $_1$ $_2$ − $_2$ $_3$ − $_3$ $_1$ (2.270)
la condizione di plasticizzazione di von Mises può anche scriversi mediante la formula
(2.266).
Gli stati tensionali caratterizzati da $_{eq}$ < $_o$ definiscono dunque punti del dominio elastico.
Asse idrostatico e piano deviatorico
Dato uno stato tensionale generico rappresentato in una terna principale dalla matrice:
T =26664
$_1$ 0 0
0 $_2$ 0
0 0 $_3$
37775

(2.271)
dalla teoria dei cerchi di Mohr si riconosce che aggiungendo uno stato
idrostaticoT_{idr} =
I si ottiene:
T_0 = T + T_{idr} =26664
$_1$ + 0 0
0 $_2$ + 0
0 0 $_3$ +
37775
(2.272)
e quindi i centri dei cerchi di Mohr traslano di mentre i raggi non variano:
C_{0k} =
($_i$ +) + ($_j$ +)
2
=
$_i$ + $_j$
2
+ = C_k +
R_{0k} =
($_i$ +) − ($_j$ +)
2
=
$_i$ − $_j$
2
= R_k
(2.273)

Non variando i raggi non variano le massime tensioni tangenziali nei piani principali,
pari proprio ai raggi, e dunque sia per il criterio di Tresca che per quello di von Mises
non variano né la funzione di plasticizzazione né la $_{eq}$. In particolare la $_{eq}$ associata
ad uno stato tensionale idrostatico è nulla per cui l'asse definito da $_1$ = $_2$ = $_3$, detto
'asse idrostatico' ed avente versore m = (1/p3)(1, 1, 1) (figura 2.38), non incontra
mai la superficie di plasticizzazione che dunque risulta essere una superficie cilindrica
parallela a tale asse.
asse idrostatico
m
σ_3
σ_1
σ_2
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
piano deviatorico
Figura 2.38: Asse idrostatico e piano deviatorico.
Il piano passante per l'origine ed ortogonale ad m è detto 'piano deviatorico'. Tale
piano contiene tutti gli stati tensionali caratterizzati dal primo invariante di tensione
nullo, ovvero trT = 0 ed il nome deviatorico deriva dal fatto che il tensore T può

essere decomposto univocamente come somma della sua ‘parte sferica’ sphT e della sua ‘parte deviatorica’ devT:

$$T = sphT + devT \quad sphT = \frac{1}{3}(trT)\, I \quad devT = T - \frac{1}{3}(trT)\, I \quad (2.274)$$

Si può facilmente mostrare che il legame elastico associa alla parte sferica di T un tensore di deformazione idrostatico, caratterizzato da variazione di volume ma non di forma, ovvero da scorrimenti tutti nulli, ed alla parte deviatorica di T un tensore di deformazione caratterizzato da variazione di volume nulla e quindi solo da variazione di forma.

Il punti del piano deviatorico definiscono stati tensionali per i quali la parte sferica è nulla per cui T = devT.

Le intersezioni delle superfici di plasticizzazione con il piano deviatorico sono per il criterio di Tresca e di von Mises rispettivamente un esagono regolare ed un cerchio ad esso circoscritto. In figura 2.39 sono disegnate tali intersezioni ed indicati con 01 , 02 e 03 le proiezioni sul piano deviatorico degli assi 1, 2 e 3.

Le intersezioni delle superfici di plasticizzazione con il piano 3 = 0 definscono il dominio di plasticizzazione per il caso piano di tensione. Esse sono riportate in figura 2.40. Si può osservare dalle figure 2.39-2.40 che il criterio di Tresca opera a vantaggio di sicurezza rispetto a quello di von Mises in quanto un punto esterno all’esagono di Tresca ed interno all’ellisse di von Mises è un punto esterno al dominio elastico secondo Tresca ed interno secondo von Mises.

σ_3'
σ_1'
σ_2'
von Mises
Tresca
σ_o
2
$\sigma_o 2$
3

Figura 2.39: Intersezione delle superfici di plasticizzazione con il piano deviatorico.

σ_1

σ 2
σ o
σ o
σ o
σ o
σ o
2
σ o 2
3
Figura 2.40: Intersezione delle superfici di plasticizzazione con il piano $_3 = 0$.
Il coefficiente di scurezza
Un ruolo importante in ogni calcolo ingegneristico, sia di progetto che di verifica, è giocato dai cosiddetti coefficienti di sicurezza. Nei riguardi del limite di plasticizzazione in un punto il coefficiente di sicurezza per un certo stato tensionale è dato dal fattore amplificativo (positivo) da applicare allo stato tensionale affinché si raggiunga il limite di plasticizzazione. Detto s tale coefficiente esso si calcola imponendo che risulti:
$_{eq}(s\ _1, s\ _2, s\ _3) = s\ _{eq}(_1, _2, _3) = s\ _{eq} = _o$) $s =$
o
eq
(2.275)
Indicando con il coefficiente di sicurezza richiesto nel particolare caso in esame, e definendo tensione ammissibile $_{am}$ il valore $_{am} = _o/$, si ricava che per avere un

coefficiente di sicurezza non minore di deve aversi:
$_{eq}\ \ _{am}$ (2.276)
La relazione (2.276) è alla base del cosiddetto metodo di verifica ‘delle tensioni ammissibili’.
Il coefficiente di sicurezza richiesto è sempre maggiore dell’unità e dipende da moltissimi fattori quali le incertezze sempre presenti riguardo l’effettiva resistenza dei materiali, l’entità delle azioni, le approssimazioni della modellazione matematica, il tipo di struttura in esame.
2.7.2 Il criterio della curva intrinseca
Il criterio della curva intrinseca è valido sia per i materiali duttili che per quelli fragili.
Esso si basa sulla determinazione sperimentale di una curva limite nel riferimento di Mohr che delimita la parte del piano, alla sinistra di tale curva, contenente i cerchi di Mohr corrispondenti a stati elastici del materiale. La curva limite è anche detta ‘curva intrinseca’. Quando come in figura 2.41 i tre cerchi di Mohr sono tutti contenuti a sinistra della curva intrinseca lo stato tensionale è all’interno del dominio elastico. Quando,

come in figura 2.42 il cerchio principale massimo contiene punti alla destra della curva
intrinseca allora lo stato tensionale è all'esterno del dominio elastico. Quando infine, come
in figura 2.43, il cerchio principale massimo è tangente alla curva lo stato tensionale
si trova sulla frontiera del dominio elastico.

σ_n

τ_{nm}

Figura 2.41: Stato tensionale interno al dominio elastico.

Il criterio della curva intrinseca presenta il vantaggio, rispetto ad altri criteri, di fornire
delle indicazioni sulle giaciture sulle quali si è avuta la crisi. Tali giaciture infatti
hanno le normali corrispondenti ai punti di tangenza del cerchio massimo con la curva
intrinseca.

Si noti che quando la curva intrinseca degenera in due rette parallele equidistanti dall'asse
delle ascisse (figura 2.44), gli stati tensionali elastici sono caratterizzati dall'avere
il cerchio principale massimo contenuto tra le due rette e la condizione di tangenza si

σ_n

τ_{nm}

Figura 2.42: Stato tensionale esterno al dominio elastico.

σ_n

τ_{nm}

Figura 2.43: Stato tensionale sulla frontiera del dominio elastico.

σ_n

τ_{nm}

Figura 2.44: Curva intrinseca corrispondente al criterio di Tresca.

ottiene quanto il raggio del cerchio massimo è pari alla semidistanza fra le due rette. Si
ottiene in questo caso il criterio di Tresca.

Capitolo 3

IL PROBLEMA DEL DE SAINT VENANT

3.1 Il problema del De Saint Venant

Il De Saint Venant ha ricavato la soluzione esatta del problema dell'equilibrio elastico,
definito con il modello di continuo tridimensionale di Cauchy, per un particolare corpo
avente la forma di un cilindro retto e sotto alcune ipotesi geometriche e meccaniche.

Tale soluzione è di estrema utilità nelle applicazioni in quanto, con buona approssimazione,
essa consente di ricavare lo stato di tensione e di deformazione in ogni punto
di una sezione retta di una trave una volta che le caratteristiche della sollecitazione su

essa agenti sono state calcolate mediante la modellazione monodimensionale.
Nel seguito non si studierà l'intera soluzione esatta, in termini di spostamenti, deformazioni
e tensioni, ricavata dal De Saint Venant. Si esporranno invece le ipotesi di base della teoria e si ricaveranno i risultati più importanti per le applicazioni meccaniche.

3.1.1 Ipotesi della teoria del De Saint Venant

Le ipotesi alla base della teoria del De Saint Venant sono di quattro tipi:

• Ipotesi geometriche:
La configurazione indeformata del solido definisce un cilindro retto. Si assumerà
per esso un sistema di riferimento cartesiano con l'origine coincidente con il baricentro di una base, gli assi x ed y contenuti nel piano contentente tale base e
l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro. La lunghezza della trave, ovvero la
distanza tra le basi, è assunta pari a L.
Le ipotesi geometriche sono schematizzate in figura 3.1. Il dominio occupato dal
solido indeformato è indicato con , ed il suo contorno @ può essere convenientemente
suddiviso nella superficie laterale $@_l$, e nelle due basi $@_{b1}$ e $@_{b2}$.
Il corpo è inoltre privo di vincoli.

• Ipotesi costitutive, cioè sul comportamento del materiale:
Il materiale è linearmente elastico, omogeneo ed isotropo.

x
y
z
L
z
Sezione retta all'ascissa z
Base z = 0
Base z = L

Figura 3.1: Geometria del solido 'trave'.

• Ipotesi sui carichi:
Le forze di volume sono nulle e la superficie laterale del cilindro è scarica. Il solido è dunque solamente caricato con una distribuzione di forze superficiali agenti sulle due basi che globalmente costuiscono un sitema equivalente a zero.
Si ha dunque:
b= 0 8 x 2
p= 0 8 x 2 $@_l$
(3.1)

• Ipotesi sullo stato tensionale:
Le fibre longitudinali della trave, ovvero parallele all'asse z, si scambiano tra loro
solamente tensioni tangenziali (figura 3.2).

x
y
z

Figura 3.2: Le fibre longitudinali si scambiano solo tensioni tangenziali.
Indicando con n la normale ad una qualsiasi giacitura tangente ad una di tali fibre,
in un arbitrario punto interno alla trave, n avrà in generale le prime due componenti
diverse da zero e la terza nulla ($n_z = 0$). L'ipotesi sullo stato tensionale nel solido si traduce nell'affermare che su tale giacitura la tensione normale è nulla,
ovvero:
$Tn \cdot n = 0$ 8 $n : n_z = 0$ (3.2)

In componenti si ha[1]:
26664
x yx zx
yx y zy
zx yz z
37775
26664
n_x
n_y
0
37775
·
26664
n_x
n_y
0
37775
$= {}_x n^2$
$_x +_y n^2_y$
$+2\ _{yx} n_x n_y = 0$ 8 n_x, n_y
(3.3)
Dovendo la relazione precedente essere verificata, per ipotesi, per ogni n_x e per ogni n_y, ponendo $n_x = 1$ e $n_y = 0$ si ottiene che $_x = 0$. Ponendo poi $n_x = 0$ e $n_y = 1$ si ricava $_y = 0$. Scegliendo infine sia n_x che n_y diversi da zero si ottiene che $_{xy} = 0$.
In definitiva l'ipotesi sullo stato tensionale si sintetizza in componenti nella relazione:
$_x = {}_y = {}_{yx} = 0$ (3.4)
Pertanto le uniche componenti non nulle della tensione sono le due componenti tangenziali $_{zx}$ e $_{zy}$, e la compomente normale $_z$. In ogni punto della trave, dunque, la matrice delle tensioni rispetto alla base del sistema di riferimento si scrive:
T =26664
0 0 $_{zx}$
0 0 $_{zy}$
zx zy z
37775
(3.5)
Lo stato tensionale è piano. Infatti, assegnata una qualsiasi normale n, si ha:
t(n)=26664
0 0 $_{zx}$

0 0 zy
zx zy z
37775
26664
n_x
n_y
n_z
37775
=26664
zx n_z
zy n_z
zx n_x + zy n_y + z n_z
37775
=
= n_z26664
zx
zy
0
37775
+ (zx n_x + zy n_y + z n_z)26664
0
0
1
37775
= z + k
(3.6)
avendo posto
= n_z = zx n_x + zy n_y + z n_z z =26664
zx
zy
0
37775
=26664
xz
yz
0
37775
(3.7)
[1]Si noti che in seguito la simmetria della matrice delle tensioni viene utilizzata sostituendo xy, xz e yz con yx, zx e zy.

Pertanto, per ogni n il vettore tensione t(n) è combinazione lineare di k e di z (figura 3.3).

x
y
z
z
i
k
j
τ_z

Piano delle
tensioni

Figura 3.3: Piano delle tensioni in un punto della trave.

3.1.2 Stato tensionale sulla generica sezione retta

Si sezioni la trave in due parti con un piano parallelo a xy, alla generica ascissa z, e si
consideri la parte che va dalla base z = 0 all'ascissa z (figura 3.4). In ogni punto del
sezionamento la normale uscente dalla parte considerata coincide con k, ovvero con il
versore dell'asse z.

Il vettore tensione agente nel generico punto della sezione retta sarà dunque dato da
(figura 3.4):

t(k) = Tk =26664
0 0 zx
0 0 zy
zx zy z
37775
26664
0
0
1
37775
=26664
zx
zy
z
37775
(3.8)

e risulta la composizione della tensione normale z, agente nella direzione k, e della
componente tangenziale, ovvero del vettore z introdotto nella (3.7):

t(k) = z k + z (3.9)

Si verifica, pertanto, che z e k individuano il piano della tensione (figura 3.3).

Per calcolare le tensioni principali e disegnare i tre cerchi principali di Mohr, conviene
adottare un nuovo sistema di riferimento x_0, y_0, z, ottenuto ruotando il sistema x, y, z
intorno all'asse z in modo che y_0 sia parallelo ed equiverso a z (figura 3.5). Posto
allora z = k zk = p 2
zx + 2
zy, la matrice delle tensioni rispetto al riferimento x_0, y_0, z
si indicherà con T_0 ed è data da:

T_0 =26664
0 0 0
0 0 z
0 z z
37775
(3.10)

x
y
z
z
i
k
j
τ_{zx}
σ_z
τ_{zy}
Figura 3.4: Vettore tensione in un punto della sezione retta.
x
y
z
z
τ_z **k**
x'
y'
σ_z
τ_z
x
x'
y' y
Figura 3.5: Sistema di riferimento x_0, y_0, z.
Si riconosce dunque che x_0 è una direzione principale a cui è associata una tensione
principale nulla. Pertanto, un cerchio di Mohr principale si ottiene facendo variare le
normali nel piano y_0z, ovvero considerando le normali a tutte le giaciture parallele alla
direzione principale x_0, e quindi dal minore ottenuto dalla seconda e terza riga e dalla
seconda e terza colonna di T_0, che si indicherà con T_{0yz}:
T_{0yz} = 24
0 z
z z
35
(3.11)

Si ottiene un cerchio di Mohr con centro di ascissa c e raggio R dati da:
c =
0 + z
2
=
z
2
R = s0 − z
2 2
+ 2

z = r2
z
4
+ 2
z (3.12)
Gli altri due cerchi di Mohr principali si ottengono tenendo conto della tensione principale
x0 = 0. I tre cerchi principali ottenuti sono disegnati in figura 3.6.
σ_z σ_z
2
τ_z
σ_1
σ_2 σ_3 σ_n
τ_{nm}
R
c
Figura 3.6: Cerchi principali di Mohr relativi allo stato tensionale in un punto della
trave.
Le tre tensioni principali sono dunque:
1 = 0 2 =
z
2 −r2
z
4
+ 2
z 3 =
z
2
+r2
z
4
+ 2
z (3.13)
Si lascia come esercizio la verifica che, adottando i criteri di Tresca e di von Mises,
le tensioni equivalenti sono date rispettivamente da:
Criterio di Tresca: eq = p2
z + 4 2
z
Criterio di von Mises: eq = p2
z + 3 2
z
(3.14)

3.1.3 Equazioni di equilibrio interno

Essendo le forze di volume nulle (b = 0), e tenendo conto delle (3.4), le equazioni
differenziali di equilibrio interno si specializzano nelle seguenti relazioni:
divT + b = 0)
8>
>>>><>>>>>:
@zx

@z
= 0
@zy
@z
= 0
@zx
@x
+
@zy
@y
+
@z
@z
= 0
(3.15)

La prime due di tali relazioni scalari rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi x e y del generico volume elementare del solido e possono anche scriversi:
@ z
@z
= 0 (3.16)
Esse si traducono nel fatto che il campo delle z non dipende da z, e dunque si ripete costantemente su ogni sezione retta della trave.
La terza equazione, che rappresenta l’equazione di equilibrio alla traslazione lungo l’asse z del generico volume elementare del solido, può anche scriversi:
div z = −
@z
@z
(3.17)

3.1.4 Condizioni di equilibrio sulla superficie laterale

Si ricorda che le condizioni di equilibrio sul contorno @ di un dominio si scrivono:
Tn = p 8x 2 @ (3.18)
essendo p le forze di superficie applicate.
Sulla superficie laterale del solido la normale ha la terza componente nulla (n_z = 0) ed inoltre si ha p = 0 in quanto le forze superficiali sulla superficie laterale sono nulle per ipotesi. Dunque, tenendo anche conto dell’espressione di T, si ottiene:
T =26664
0 0 zx
0 0 zy
zx zy z
37775
26664
n_x
n_y

0
37775
=26664
0
0
0
37775
)
26664
0
0
$_{zx}\, n_x + {}_{zy}\, n_y$
37775
=26664
0
0
0
37775
(3.19)
Le prime due componenti della relazione vettoriale ottenuta rappresentano delle identità,
mentre mentre la terza può scriversi in modo più compatto:
$_z \cdot n = 0$ (3.20)
Essa equivale ad affermare che le tensioni $_z$ agenti sul contorno della sezione retta
devono essere tangenti al contorno stesso (figura 3.7).
Figura 3.7: Sul contorno della sezione i vettori $_z$ risultano tangenti al contorno stesso.

3.1.5 Caratteristiche della sollecitazione
La risultante dei vettori tensione sulla sezione retta all'ascissa z considerata in precedenza
è data da:
$R(z) = Z_A$
t(k) dA =
2666666664
Z $_A$
$_{zx}$ dA
Z $_A$
$_{zy}$ dA
Z $_A$
$_z$ dA
3777777775
=26664
T_x
T_y
N
37775
(3.21)
Le prime due componenti, ovvero T_x e T_y, sono le componenti dello sforzo di taglio T

T = ZA
z dA =
266666664
Z A
zx dA
Z A
zy dA
0
377777775
(3.22)
che dunque agisce nel piano della sezione. La terza componente, agente nella direzione
dell'asse z, è lo sforzo normale:
N = ZA
z dA (3.23)
x
y
z
z
k
N
T_x
T_y
G
Figura 3.8: Risultante dei vettori tensione sulla sezione retta.
Il momento risultante rispetto al baricentro G della sezione retta, di posizione:
x_G =26664
0
0
z
37775
(3.24)

è dato da:
M_G = ZA
[(x − x_G) × t(k)] dA (3.25)
Si ha inoltre (figura 3.9):
r = x − x_G =26664
x
y
z
37775
−
26664
0
0
z
37775
=26664
x
y

0
37775
(3.26)
e quindi:
$(x - x_G) \times t(k)$=26664
x
y
0
37775
$\times$
26664
zx
zy
z
37775
= det26664
i j k
x y 0
zx zy z
37775
=
= ($_z$ y) i − ($_z$ x) j + ($_{zy}$ x − $_{zx}$ y) k =26664
$_z$ y
−$_z$ x
$_{zy}$ x − $_{zx}$ y
37775
(3.27)
x
y
z
z
$\mathbf{x}_G$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{x}$ $\mathbf{x}_G$ $\mathbf{r}$ =
G
Figura 3.9: Vettore posizione rispetto al baricentro G della sezione retta.
Sostituendo la (3.27) nella (3.25), si ha:
M =26664
M_x
M_y
M_z
37775
con:
8>
>>>><>>>>>:
M_x = Z A
$_z$ y dA
M_y = −Z A
$_z$ x dA
M_z = Z A
($_{zy}$ x − $_{zx}$ y) dA
(3.28)

Le prime due componenti sono associate alla sollecitazione di flessione, e rappresentano
dunque le due componenti del ‘momento flettente’M_f , mentre la terza componente
è associata alla sollecitazione di ‘torsione’, ed è dunque detta ‘momento torcente’ ed
indicata anche con M_t:
M_f =26664
M_x
M_y
0
37775
M_t = M_z (3.29)
x
y
z
z
k
M =
M_x
M_y
t M_t
G
Figura 3.10: Momento risultante dei vettori tensione sulla sezione retta rispetto al
baricentro G della sezione.
Riassumendo, le caratteristiche della sollecitazione agente sulla sezione sono rappresentate
dallo sforzo normale N (che è uno scalare), dal momento flettente M_f (che è
un vettore parallelo al piano xy avente per componenti M_x e M_y), lo sforzo di taglio T
(che è un vettore parallelo al piano xy avente per componenti T_x e T_y) ed il momento

torcente M_t (che è uno scalare):
• Sforzo normale : N = Z A
z dA
• Momento flettente : M_f =26664
M_x
M_y
0
37775
con: 8>><>>:
M_x = Z A
z y dA
M_y = −Z A
z x dA
• Taglio : T =26664
T_x
T_y

0
37775
con: 8>><>>:
$T_x = Z_A$
$_{zx}$ dA
$T_y = Z_A$
$_{zy}$ dA
• Momento torcente : $M_t = Z_A$
$(_{zy}\, x - {}_{zx}\, y)\, dA$
(3.30)

3.1.6 Postulato del De Saint Venant

La possibilità di usare i risultati della teoria del De Saint Venant per ricavare ricavare lo
stato di tensione e di deformazione in ogni punto di una sezione retta di una trave una
volta note le caratteristiche della sollecitazione è dovuta al seguente postulato:
Postulato 5 Sistemi di forze staticamente equivalenti agenti sulle basi della trave producono,
con ottima approssimazione, gli stessi effetti su tutta la lunghezza della trave,
ad eccezione di zone di estensione limitata in prossimità delle basi stesse.
La distanza lungo z dalle basi alla quale si 'estinguono' le differenze tra gli effetti
di sistemi di forze staticamente equivalenti agenti sulle basi stesse è detta 'distanza di
estinzione', e si indicherà con d_e. Per la maggior parte delle sezioni rette delle travi essa
è circa pari alla dimensione massima della sezione retta stessa[2].
Si faccia riferimento alla figura 3.11 in cui è indicata una stessa trave soggetta sulle
basi a tre sistemi diversi di forze autoequilibrati. Nel caso in figura, si assuma che su
ciascuna base i tre sistemi di forze abbiano tutti risultante nulla e momento risultante
uguale. In base al postulato di De Saint Venant, possono essere significative le differenze
tra gli effetti (tensioni e deformazioni) nel punto P_1 posto ad una distanza dalla base
sensibilmente minore della distanza di estinzione d_e. Viceversa, nel punto P_2, posto ad
una distanza sensibilmente maggiore di d_e, tali differenze possono assumersi trascurabili
dal punto di vista ingegneristico[3].

[2]Questo può non essere valido in alcuni casi che riguardano le sezioni sottili aperte.
[3]E' utile sottolineare che una giusta interpretazione del postulato richiede una certa sensibilità ingegneristica e non può prescindere dal problema in esame.

d_e d_e
P_1
P_1
P_1 P_2
P_2
P_2

Figura 3.11: Postulato di De Saint Venant: sistemi di forze applicati sulle basi diversi
ma staticamente equivalenti.
Si vedrà in seguito che la soluzione esatta della teoria del De Saint Venant prevede
particolari distribuzioni di tensioni su ciascuna sezione retta e quindi anche di forze
superficiali sulle basi. Dal postulato di De Saint Venant si deduce quindi che, laddove in
alcuni problemi la distribuzione delle forze realmente applicate sulle basi differisce dalla
soluzione esatta, la soluzione del De Saint Venant non può essere adottata come base
per il progetto e la verifica della parte della struttura prossima alla base stessa e che gli
effetti locali vanno accuratamente studiati con modellazioni matematiche e numeriche
più raffinate eventualmente affiancate o sostituite da adeguate indagini sperimentali.
Un'osservazione analoga vale per le zone delle travi in prossimità di forze e coppie
concentrate.

3.2 Elementi di geometria delle aree

Si consideri un dominio connesso del piano, ovvero dello spazio euclideo bidimensionale,
che rappresenta la sezione retta di una trave (figura 3.12). Sia A l'area della sezione
e si assuma inoltre un'origine O nel piano ed un riferimento cartesiano {O, x, y}, in
modo da individuare ogni suo punto mediante il vettore posizione r rispetto all'origine,
di componenti x e y. Siano inoltre $\{i, j\} = \{e_1, e_2\}$ i versori degli assi x ed y.

3.2.1 Momento statico

Si definisce momento statico della sezione rispetto ad un punto Q, di posizione r_Q e si
indica con S_Q, il seguente vettore:

$$S_Q = \int_A (r - r_Q)\, dA \quad (3.31)$$

O
r
x
y

Figura 3.12: Sezione retta.
In componenti si ha:
S_O =24
S_x
S_y
35
=26664
$\int_A$

x dA
Z A
y dA
37775
(3.32)
3.2.2 Baricentro
Si definisce baricentro della sezione, e si indica con G, l'unico punto della sezione
rispetto a cui il momento statico è nullo. Da tale definizione, indicando con r_G il vettore
posizione di G, si ottiene:
$S_G = 0$) Z_A
$(r - r_G)$ dA = Z_A
r dA − r_G Z_A
dA = $S_O - r_G$ A = 0 (3.33)
dove S_O indica, in base alla (3.31), il momento statico della sezione rispetto all'origine
O. La posizione del baricentro è data dunque da:
r_G =
S_O
A
(3.34)
La (3.34) può anche essere utilizzata per ricavare il momento statico rispetto ad O
dell'area A, nota la posizione del baricentro G:
$S_O = r_G$ A (3.35)
3.2.3 Tensore e momenti d'inerzia
Si assuma l'origine coincidente con il baricentro della sezione. Si definisce tensore
d'inerzia baricentrico, e si indica con J_G, il tensore simmetrico:
J_G = Z_A
(r r) dA (3.36)
222 G. Alfano - Appunti di Scienza delle Costruzioni
In componenti si ha:
J_G = Z_A
0@
24
x
y35 24
x
y35
1A
dA = Z_A
24
x_2 x y
x y $y_2$35 dA =24
J_{Gx} J_{Gxy}
J_{Gxy} J_{Gy}
35
(3.37)
avendo posto:

J_{Gx} = Z_A
x_2 dA J_{Gy} = Z_A
y_2 dA J_{Gxy} = Z_A
x y dA (3.38)
I termini J_{Gx} e J_{Gy} sono i ‘momenti d’inerzia’ rispettivamente lungo x e y. Il termine
J_{Gxy} è detto ‘momento d’inerzia centrifugo’.
Si definisce ‘momento d’inerzia polare’ rispetto al baricentro lo scalare J_{Gp} dato da:
J_{Gp} = Z_A
krk_2 dA = Z_A
(x_2 + y_2) dA (3.39)
Dalla definizione si ha:
J_{Gp} = Z_A
x_2 dA + Z_A
y_2 dA = J_{Gx} + J_{Gy} (3.40)
Rotazione del riferimento
Si consideri ora un sistema di riferimento cartesiano con origine ancora in G ed assi x_0
ed y_0 ottenuti ruotando x ed y di un angolo , assunto positivo se antiorario. Si indicherà
inoltre con n il versore dell’asse x_0 e con m quello dell’asse y_0. Le componenti di n e
m rispetto alla base {i, j} sono:
n =24
cos
sen 35 m =24
−sen
cos 35 (3.41)
Dette x e y le coordinate di un punto P del piano rispetto al sistema {G, x, y}, le
coordinate rispetto al sistema ruotato {G, x_0, y_0} sono date da:
x_0 = r · n y_0 = r ·m (3.42)
La matrice J_{0G} associata al tensore d’inerzia rispetto al nuovo sistema di riferimento
ha componenti
J_{0G} =24
J_{Gn} J_{Gnm}
J_{Gnm} J_{Gm}
35
(3.43)
dove:
J_{Gn} = Z_A
x_{02} dA J_{Gm} = Z_A
y_{02} dA J_{Gnm} = Z_A
x_0 y_0 dA (3.44)

G
r
x
y

α **n m**
i
x' **j**
y'
r n
r m
Figura 3.13: Sistema di riferimento ruotato.
Dalle formule del cambiamento di base si ha:
$J_{0G} = QJ_GQ_t$ (3.45)
dove la matrice Q è data da: 24
cos sen
−sen cos 35 (3.46)
Sostituendo nella (3.43) e svolgendo i passaggi si ottiene:
$J_{Gn} = J_{Gx} \cos^2 + 2 J_{Gxy} \cos \ \mathrm{sen} + J_{Gy} \mathrm{sen}^2$
$J_{Gnm} = (J_{Gy} - J_{Gx}) \mathrm{sen} \cos + J_{Gxy} (\cos^2 - \mathrm{sen}^2)$
(3.47)
Si verifica facilmente che tali relazioni si possono scrivere come segue:
$J_n = J_G n \cdot n$
$J_{Gnm} = J_G m \cdot n = J_G n \cdot m$
(3.48)
Cerchio di Mohr
Le relazioni (3.48) sono analoghe alle seguenti altre:
$_n = T_{xy} n \cdot n$ $_{nm} = T_{xy} n \cdot m$ con: T_{xy} = 24
x xy
xy y
35
(3.49)
Queste ultime forniscono la componente normale $_n$ in direzione n e quella tangenziale
$_{nm}$ in direzione m sulla giacitura di normale n, quando la normale stessa ruota nel

piano xy. Tale analogia consente di applicare la teoria dei cerchi di Mohr al problema
in esame senza doverla sviluppare di nuovo. In particolare, riportando in un riferimento
cartesiano la componente J_{Gn} sulle ascisse e quella J_{Gnm} sulle ordinate, al ruotare del
vettore n il punto ottenuto descrive un cerchio, che ha centro nel punto di ascissa c ed
ordinata nulla, e raggio R, con c ed R dati da (figura 3.14):
$$c = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J^2_{Gxy}} \quad (3.50)$$
$J_{G\,nm}$
c =

$J_{G\,n}$
$J_{G\,x}$
$J_{G\,xy}$
$J_{G\,y}$
$J + {}_{G\,x} J_{G\,y}$
2
$J\ 2\alpha_p\ G\ \eta$
$J\alpha_p\ G\ \xi$
η
ξ $\mathbf{e}_\xi$
$\mathbf{e}_\eta$
α_p
Figura 3.14: Determinazione grafica delle direzioni principali e dei momenti principali
d'inerzia attraverso il Cerchio di Mohr.
Assi principali d'inerzia
Dalla costruzione del cerchio di Mohr si deduce che esiste un valore $_p$ dell'angolo
per cui si annulla il momento centrifugo J_{Gnm}. Poiché:
8<:
$J_{Gnm} = J_G\, n \cdot m = 0$
$n \cdot m = 0$) $J_G\, n = \ n$ (3.51)
si deduce che il versore n ruotato di $_p$ rispetto a x è un autovettore di J_G. Analogamente
si vede che il versore m ruotato di $_p$ rispetto a y è anch'esso un autovettore di J_G.
Il riferimento {G, , } ruotato di $_p$ rispetto a {G, x, y} è detto 'riferimento principale
d'inerzia'. Le rette ed sono dette 'assi principali d'inerzia', le loro direzioni
sono dette 'direzioni principali d'inerzia' ed i momenti J_G e J_G sono detti 'momenti
principali d'inerzia'. Essendo nullo il momento centrifugo ($J_G = 0$), la matrice

d'inerzia J^p
$_G$ rispetto al riferimento principale è diagonale:
J^p
$_G$ =24
J_G 0
0 J_G
35
(3.52)
I momenti principali d'inerzia rappresentano dunque gli autovalori del tensore d'inerzia
e, attraverso la costruzione del cerchio di Mohr, si ottengono come intersezione del
cerchio con l'asse delle ascisse. I corrispondenti autovettori definiscono le direzioni
principali d'inerzia. Si noti che $_p$ è definito a meno di una rotazione di /2. In altre
parole, si può scegliere arbitrariamente di indicare una qualsiasi delle direzioni principali

con e l’altra con . E’ conveniente però orientare gli assi principali in modo che il riferimento {G, , } sia levogiro[4].
Scegliendo ad esempio di indicare con J_G il più grande dei due momenti principali
si ottiene:

$$J_G = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J_{Gxy}^2}$$

$$J_G = \frac{J_{Gx} + J_{Gy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{Gx} - J_{Gy}}{2}\right)^2 + J_{Gxy}^2} \qquad (3.53)$$

In generale, utilizzando la procedura grafica che fornisce la corrispondenza tra le
direzioni n ed i punti sul cerchio di Mohr, già vista per il caso delle tensioni, per ottenere
la corrispondenza tra assi principali e momenti principali d’inerzia si utilizza la seguente
costruzione:

• Arbitrariamente si pone uno di momenti principali pari a J_G e l’altro pari a J_G. Dal polo P del cerchio, che come si è visto ha coordinate (J_{Gx}, J_{Gxy}), si tracciano le due rette passanti per i punti di ascissa J_G e J_G ed ordinata nulla. L’asse passante per il punto di ascissa J_G è l’asse , mentre quello passante per il punto di ascissa J_G è l’asse . Gli assi vengono poi orientati in modo che debba routare di 90^o in senso antiorario per sovrapporsi a .

In questo caso, come si è detto in precedenza, in figura 3.14 si è scelto di indicare
con J_G il più grande tra i momenti d’inerzia.
Per verificare la validità della costruzione nel caso dell’asse basta osservare che
la procedura generale, dimostrata nel caso delle tensioni, richiede come prima operazione
di tracciare per il punto di ascissa J_G ed ordinata nulla una retta orizzontale ed individuare l’intersezione di questa con il cerchio. In questo caso tale intersezione è il
punto di ascissa J_G ed ordinata nulla. Da tale punto bisogna quindi tracciare una retta
passante per il polo P. La direzione di quest’ultima retta individua la direzione associata
al punto di ascissa J_G ed ordinata nulla. In definitiva tale procedura ci dice che la
direzione di è quella della retta congiungente il punto di ascissa J_G ed ordinata nulla
con il polo P.

[4]Sarebbe possibile definire un riferimento principale destrogiro, partendo inizialmente da un riferimento

non principale levogiro, ma bisognerebbe poi fare estrema attenzione ai segni nella scrittura di molte relazioni. Per questo motivo conviene evitare tale complicazione.

Per individuare l'angolo p che l'asse forma con l'asse x si osservi che, nella figura
3.14, il versore positivo e della direzione ha componenti:

e =24
cos p
sen p
35
(3.54)

Ma essendo e un autovettore di J_G esso è una soluzione del problema:

24
$J_{Gx} - J_G$ J_{Gxy}
J_{Gxy} $J_{Gy} - J_G$
35
24
a_1
a_2
35
=24
0
035 (3.55)

Essendo J_G un autovalore di J_G il determinante della matrice è nullo e dunque le due
righe sono linearmente indipendenti. Per calcolare a_1 ed a_2 basta quindi risolvere una
qualunque delle due equazioni scalari ottenute dalla (3.55). Utilizzando la prima si ha:

$(J_{Gx} - J_G)\, a_1 + J_{Gxy}\, a_2 = 0$ (3.56)

da cui:

tang p =
a_2
a_1
=
$J_G - J_{Gx}$
J_{Gxy}
(3.57)

E' utile osservare che, se $J_G = J_G$, il cerchio di Mohr degenera in un punto, per cui tutte le direzioni sono principali d'inerzia e tutti i momenti d'inerzia lungo tutti gli
assi baricentrici sono uguali. Questo è il caso importante delle sezioni dotate di più di
due assi di simmetria, quali ad esempio quelle circolari e quadrate.

Assi di simmetria

Si dimostra che se una sezione ammette un asse di simmetria, allora tale asse contiene
il baricentro ed è anche un asse principale d'inerzia. L'asse baricentrico ortogonale
all'asse di simmetria risulta dunque anch'esso principale d'inerzia.

Da ciò si deducono anche le seguenti due proprietà:

• se la sezione ammette due assi di simmetria allora la loro intersezione ne

individua
il baricentro ed entrambi gli assi di simmetria sono assi principali d’inerzia;
• se la sezione ammette più di due assi di simmetria tutti gli assi baricentrici sono
principali d’inerzia, e dunque il cerchio di Mohr degenera in un punto e tutti i momenti d’inerzia lungo qualsiasi asse baricentrico sono uguali. E’ questo il caso
importante delle sezioni circolari o a corona circolare e delle sezioni quadrate.
Teorema del trasporto
Si assuma un’origine O non coincidente con il baricentro G. Si indichi con r il vettore
posizione di un generico punto rispetto a O, con r il vettore posizione rispetto al baricentro G e con r_G il vettore posizione del baricentro rispetto a O (figura 3.15):
$r = r_G + r$ (3.58)

G
r
x
y
O
r*
rG
x'
y'
Figura 3.15: Teorema del trasporto.
Il tensore d’inerzia J_O rispetto a O è dato da:
$J_O = Z_A$
$(r \; r)\, dA = Z_A$
$[(r_G + r) \; (r_G + r)]\, dA =$
$= Z_A$
$(r \; r)\, dA + r_G \; Z_A$
$r\, dA + Z_A$
$r\, dA \; r_G + Z_A$
$dA\, r_G \; r_G =$
$= J_G + r_G \; S_G + S_G \; r_G + A r_G \; r_G$
(3.59)
Poiché il vettore S_G rappresenta il momento statico della sezione rispetto al baricentro,
esso è nullo per definizione. Dunque si ottiene la relazione:
$J_O = J_G + A r_G \; r_G$ (3.60)
Il risultato espresso dalla (3.60) è noto come ‘teorema del trasporto’. In base ad esso,
il tensore d’inerzia rispetto ad un punto O non coincidente con il baricentro, si ottiene
come somma del tensore d’inerzia baricentrico e del tensore d’inerzia rispetto ad O
calcolato supponendo tutta l’area contentrata nel baricentro.
Detti x ed y gli assi del sistema di riferimento con origine in G, e x_0 ed y_0 quelli del
sistema di riferimento con origine in O, in componenti la (3.60) fornisce:
$J_{Ox_0} = J_{Gx} + Ax_2$ $J_{Oy_0} = J_{Gy} + Ay_2$ $J_{Ox_0y_0} = J_{Gxy} + Ax\ y$ (3.61)

Alcune osservazioni sulle convenzioni adottate

E’ utile sottolineare che la notazione adottata è stata scelta per potere utilizzare in modo più naturale un approccio di tipo tensoriale per il calcolo delle caratteristiche inerziali di una sezione. In molte trattazioni si utilizza una diversa notazione, secondo la quale,

data una retta orientata a del piano, si indica con I_a il cosiddetto momento d’inerzia intorno ad a:

$$I_a = \int_A d_a^2 \, dA \quad (3.62)$$

dove d_a indica la distanza del generico punto dalla retta a, assunta positiva se percorrendo la retta a nel suo verso positivo il punto si trova alla sinistra di a (figura 3.16).

Data una seconda retta orientata b, viene detto momento centrifugo I_{ab} lo scalare:

$$I_{ab} = \int_A d_a \, d_b \, dA \quad (3.63)$$

x G
y
a
$d_a < 0$
$d_a > 0$
x
$d_x = y$ y
$d_y = -x$

Figura 3.16: Distanza orientata da una retta.

Con riferimento agli assi baricentrici x e y in figura 3.16, per passare da una notazione all’altra bisogna considerare che $d_x = y$ e $d_y = -x$. Pertanto le relazioni tra i momenti d’inerzia lungo x e y, ovvero J_{Gx} e J_{Gy}, e quelli intorno a x e y, ovvero I_{Gx} e I_{Gy}, nonché quelle tra i momenti centrifughi J_{Gxy} e I_{Gxy} si ottengono da:

$$J_{Gx} = \int_A x^2 \, dA = \int_A d_y^2 \, dA = I_{Gy}$$
$$J_{Gy} = \int_A y^2 \, dA = \int_A d_x^2 \, dA = I_{Gx}$$
$$J_{Gxy} = \int_A x \, y \, dA = -\int_A d_x \, d_y \, dA = -I_{Gxy} \quad (3.64)$$

ovvero in sintesi:

$$I_{Gx} = J_{Gy} \quad I_{Gy} = J_{Gx} \quad I_{Gxy} = -J_{Gxy} \quad (3.65)$$

3.2.4 Ellisse d'inerzia

Si assuma l'origine coincidente con il baricentro della sezione. Si definisce 'ellisse
centrale d'inerzia', o anche semplicemente 'ellisse d'inerzia', l'ellisse di equazione:

AJ^{-1}
$_G\, r \cdot r = 1$ (3.66)

Se si assume un riferimento con gli assi x ed y coincidenti con gli assi principali d'inerzia ed si ha:

$J_G =24$
$J_{Gx}\ 0$
$0\ J_{Gy}$
35
(3.67)

e dunque:

J^{-1}
$_G =26664$
1
J_{Gx}
0
0
1
J_{Gy}
37775
$)\ AJ^{-1}$
$_G =26664$
A
J_{Gx}
0
0
A
J_{Gy}
37775
(3.68)

Si definiscono 'raggi d'inerzia' $_x$ ed $_y$ gli scalari[5]:

$_x = rJ_{Gx}$
A
$_y = rJ_{Gy}$
A
(3.69)

Pertanto, in un riferimento principale l'equazione dell'ellisse centrale d'inerzia è data
da:

AJ^{-1}
$_G\, r \cdot r =26664$
1
2
x
0
0
1
2y

37775
24
x
y35 ·24
x
y35 = 1 (3.70)
e quindi assume la ‘forma canonica’:
x_2
2
x
+
y_2
2y
= 1 (3.71)
I raggi d’inerzia $_x$ e $_y$ rappresentano dunque i semiassi dell’ellisse d’inerzia (figura
3.17).
Se $J_x = J_y = J$, allora $_x = _y =$ e l’ellisse d’inerzia è un cerchio di raggio .
5In molti testi, si assume:
$_x$ = rI_{Gx}
A
= rJ_{Gy}
A
$_y$ = rI_{Gy}
A
= rJ_{Gx}
A

G
$x = \xi$
$y = \eta$
ρ_x
ρ_y
Figura 3.17: Ellisse d’inerzia.
Direzioni coniugate
Due versori n e s individuano due ‘direzioni coniugate’ rispetto all’ellisse d’inerzia se
si ha:
J^{-1}
$_G$ n · s = 0 (3.72)
E’ ovvio che se le direzioni definite da n e s sono coniugate rispetto all’ellisse d’inerzia, allora anche quelle associate alle coppie {−n, s}, {n,−s} e {−n,−s} lo
sono.
E’ facile vedere che se l’ellisse d’inerzia è un cerchio allora tutte le direzioni coniugate
sono ortogonali tra loro, mentre se $_x$ 6= $_y$, le uniche direzioni coniugate che risultano anche ortogonali tra loro sono quelle principali d’inerzia.
Due rette baricentriche parallele a due direzioni coniugate si dicono ‘assi coniugati’
rispetto all’ellisse d’inerzia.
Assegnato una retta s baricentrica, si dimostra che l’asse n coniugato di s rispetto all’ellisse

d’inerzia è la retta passante per G parallela alle due tangenti n_1 ed n_2 all’ellisse
nei punti d’intersezione S_1 e S_2 di s con l’ellisse (figura 3.18).
Antipolarità rispetto all’ellisse d’inerzia
Assegnato un punto C del piano, di posizione r_C, si definisce ‘antipolare’ di C rispetto
all’ellisse d’inerzia la retta di equazione:
AJ^{-1}
$_G\, r_C \cdot r + 1 = 0$ (3.73)
ed il punto C è detto ‘antipolo’ della retta di equazione (3.73).
Si lascia come esercizio la verifica che, in un riferimento principale xy, l’equazione
(3.73) si scrive:
$x_C\, x$
2
x
+
$y_C\, y$
2y
+ 1 = 0 (3.74)

s
n
n_1
n_2
s
n
S_2
S_1
Figura 3.18: Rispetto all’ellisse d’inerzia s e n definiscono due direzioni coniugate
mentre s ed n sono due assi coniugati.
Le intersezioni con gli assi si ottengono ponendo alternativamente x = 0 e y = 0
nella (3.74):
x = 0) $y_C\, y = -$2y
y = 0) $x_C\, x = -$2
x (3.75)
Sfruttando la relazione a b = h^2 relativa al triangolo rettangolo di figura 3.19, si
ricava la costruzione grafica riportata in figura 3.20 per la determinazione dell’antipolare
n di un punto C del piano. Da quest’ultima si deduce che l’asse neutro si trova sempre
dalla parte opposta di C rispetto a G.
h
a b
$a\, b = h^2$
Figura 3.19: Relazione tra i cateti a e b e l’altezza h sull’ipotenusa di un triangolo
rettangolo.

3.2.5 Caratteristiche inerziali di alcune sezioni

Sezione rettangolare
Si consideri la sezione rettangolare in figura 3.21, di base b ed altezza h. Gli

assi x e
y in figura sono di simmetria e dunque sono principali d’inerzia. La loro
intersezione

$x = \xi$
$y = \eta$
ρ_x
ρ_y
C
x_C
y_C
$x = \xi$
$y = \eta$
C
$x = \xi$
$y = \eta$
ρ_x
C
$x = \xi$
$y = \eta$
n
C
y_C
y
ρ_y
x_C x
G
G
Figura 3.20: Costruzione grafica per la determinazione dell’antipolare n di un
punto C
del piano rispetto all’ellisse d’inerzia.
definisce il baricentro G. Si lascia come esercizio la verifica che la matrice
associata al
tensore d’inerzia, rispetto al sistema adottato in figura, è la seguente:
J_G =26664
$h\,b^3$
12
0
0
$b\,h^3$
12
37775
(3.76)
I raggi d’inerzia sono dati da:
$_x$ = rJ_{Gx}
A
= r$h\,b^3$
12 ·
1
b h
=
b

p12
$_y$ = rJ_{Gy}
A
= rb h^3
12 ·
1
b h
=
h
p12
(3.77)

x
y
b
h G
ρ_x
ρ_y
Figura 3.21: Sezione rettangolare.
Sezione circolare
Si consideri la sezione circolare in figura 3.22 di raggio R. Il suo centro ne è ovviamente
il baricentro G, e tutte le rette per G sono assi di simmetria per cui si ha:
J_{Gx} = J_{Gy} = J (3.78)
Conviene calcolare allora il momento polare J_{Gp}. Ponendo r = krk e dA =
2 r dr:
J_{Gp} = Z_A
r^2 dA = Z_0
R
r^2 2 r dr = 2 Z_0
R
r^3 dr (3.79)
da cui:
J_{Gp} =
 R^4
2
(3.80)
Essendo poi:
J_{Gp} = J_{Gx} + J_{Gy} = 2 J (3.81)
si ricava il valore del momento d'inerzia lungo qualsiasi asse baricentrico:
J =
 R^4
4
(3.82)
L'ellisse d'inerzia per una sezione circolare è un cerchio di raggio dato da:
 = rJ
A
= r R^4
4 ·
1
 R^2 =

R
2
(3.83)

x
y
G
R
R2
ρ =
Figura 3.22: Sezione circolare.
Sezione a corona circolare
Si consideri la sezione a corona circolare in figura 3.22, di raggio interno R_i e raggio
esterno R_e. Anche in questo caso il suo centro ne è ovviamente il baricentro G e tutte
le rette per G sono assi di simmetria per cui si ha:
$J_{Gx} = J_{Gy} = J$ (3.84)
x
y
G
R_e
R_i
Figura 3.23: Sezione a corona circolare.
Indicando con J_{piena} il momento d'inerzia della sezione circolare piena di raggio
R_e e con J_{foro} il momento d'inerzia della sezione circolare piena di raggio R_i, per
l'additività degli integrali si ha:
$J_{piena} =$
R^4_e
4
$J_{foro} =$
R^4_i
4
$J_{piena} = J_{foro} + J$ (3.85)
da cui:
$J =$
$R^4_e - R^4_i$
4
(3.86)

Sezione a corona circolare sottile
Posto = <e − <i, una sezione a corona circolare si dice sottile se << (<e + <i)/2.
In tal caso si lascia per esercizio la verifica dei seguenti risultati:
$J = R^3$ =
R
p2
(3.87)

Sezione a doppia T
Si consideri la sezione ‘a doppia T’ in figura 3.24. Avendo la sezione due assi di simmetria
x ed y, essi sono anche principali d’inerzia e la loro intersezione individua il baricentro G.
46 8 46
10 120 10
Figura 3.24: Sezione a doppia T: geometria (dimensioni espresse in mm).
Per ricavare il tensore d’inerzia si decompone la sezione in tre rettangoli, di area A_1,
A_2 ed A_3, come indicato in figura 3.25. Per l’additività dell’integrale, si ha:
$J_G = Z_A$
$(r \quad r)\, dA = Z_{A_1}$
$(r \quad r)\, dA + Z_{A_2}$
$(r \quad r)\, dA + Z_{A_3}$
$(r \quad r)\, dA =$
$= J^{(1)}$
$_G + J^{(2)}$
$_G + J^{(3)}$
$_G$
(3.88)
avendo indicato con $J^{(i)}$
$_G$, i = 1, 2, 3, il tensore d’inerzia dell’i-esimo rettangolo rispetto
a G. Bisogna però osservare che i baricentri G_1 e G_2 del primo e del secondo rettangolo
sono diversi dal baricentro G dell’intera sezione, mentre $G_3 = G$. Pertanto, $J^{(1)}$
$_G$ e
$J^{(2)}$
$_G$ rappresentano i tensori d’inerzia dei primi due rettangoli rispetto ad un punto che
non coincide con il baricentro, e dunque per la loro determinazione bisogna utilizzare il
teorema del trasporto, ovvero la formula (3.60).
Si consideri ad esempio il primo rettangolo. Per l’applicazione della (3.60) si nota
che $J^{(1)}$
$_G$ rappresenta il tensore d’inerzia rispetto a G del primo rettangolo, avente per
baricentro G_1. Dunque, nella formula (3.60) bisogna sostituire O con G e G con
G_1.

Si ha:
$J^{(1)}$
$_{G_1} = J^{(2)}$
$_{G_2} = 26664$
$10 \cdot 100^3$
12
0
0
$100 \cdot 10^3$
12
37775
=24

8.33 E 5
0 8.33 E 335
$J^{(3)}$
$_{G_3} = J^{(3)}$
$_{G}$ =26664
$120 \cdot 8^3$
12
0
0
$8 \cdot 120^3$
12
37775
=24
5.12 E 3
0 1.152 E 635
(3.89)
r_{G_1} =24
0
6535 r_{G_2} =24
0
−6535 r_{G_3} =24
0
035 (3.90)
$A_1 = A_2 = 10 \cdot 100 = 1000$ $A_3 = 8 \cdot 120 = 960$ (3.91)
Da cui:
$J^{(1)}$
$_{G} = J^{(2)}$
$_{G} = J^{(1)}$
$_{G_1} + A_1 r_{G_1}$ r_{G_1} =24
8.33 E 5 0
0 8.33 E 335 + 100024
0
6535 24
0
6535 =
=24
8.33 E 5 0
0 8.33 E 335 +24
0 0
0 4.225 E 635 =24
8.33 E 5 0
0 4.233 E 635 (3.92)
Si ottiene quindi:
$J_G = J^{(1)}$
$_{G} + J^{(2)}$
$_{G} + J^{(3)}$
$_{G}$ = 224
8.33 E 5 0
0 4.233 E 635 +24
5.12 E 3
0 1.152 E 635 =
=24

1.67 E 6 0
0 9.61 E 635 (mm$_4$)
(3.93)
In componenti ed in cm si ha:
$J_{Gx} = 167$ cm$_4$ $J_{Gy} = 961$ cm$_4$ $J_{Gxy} = 0$ (3.94)
Essendo $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2960mm_2$, i raggi d'inerzia sono dunque:
$_x$ = r1.67 E 6
2960
= 24mm $_y$ = r9.61 E 6
2960
= 57mm (3.95)
L'ellisse d'inerzia è riportata in figura 3.26.

$x = x_3$
x_1
$y = y_3$
y_1
x_2
y_2
G_1
G_2
$G = G_3$
A_1
A_2
A_3
Figura 3.25: Sezione a doppia T: suddivisione in rettangoli per il calcolo delle caratteristiche inerziali.
x
y
57
24
G
Figura 3.26: Sezione a doppia T: ellisse d'inerzia.
Sezione a L
Si consideri la sezione a L di figura 3.27. Non presentando la sezione assi di simmetria
bisogna innanzitutto determinare la posizione del baricentro. A tale scopo, si sceglie arbitrariamente
un sistema di riferimento $\{O, x_0, y_0\}$ e si suddivide l'area in due rettangoli

come indicato in figura 3.28.
100
12
200
10
Figura 3.27: Sezione a L.
Per l'additività dei momenti statici si ha:
S_O = Z$_A$
r$_0$ dA = Z$_{A1}$
r$_0$ dA + Z$_{A2}$
r$_0$ dA = S$_{(1)}$

$_O + S^{(2)}_O$ (3.96)

Inoltre, dalla (3.35) si ricava:

$$S^{(i)}_O = \mathbf{r}_{0G_i} A_i \quad (3.97)$$

Pertanto, utilizzando la (3.34):

$$\mathbf{r}_{0G} = \frac{S_O}{A} = \frac{S^{(1)}_O + S^{(2)}_O}{A_1 + A_2} \quad (3.98)$$

si ricava che il baricentro si determina come media pesata delle posizioni dei baricentri
dei rettangoli che compongono la sezione, utilizzando come pesi le aree[6]:

$$\mathbf{r}_{0G} = \frac{\mathbf{r}_{0G_1} A_1 + \mathbf{r}_{0G_2} A_2}{A_1 + A_2} \quad (3.99)$$

Nel caso in esame si ricava:

$A_1 = 1000$ $A_2 = 2280$ $A = A_1 + A_2 = 3280$ (3.100)

[6] Per tale motivo il baricentro si trova necessariamente sulla congiungente G_1 e G_1.

A_1
A_2
y_1
x_1
x'
y'
y_2
x_2
$\mathbf{r}_{G'_2}$
$\mathbf{r}_{G'_1}$
G
$\mathbf{r}_{G'}$
$\mathbf{r}_{G_1}$
$\mathbf{r}_{G_2}$
y
x
O

Figura 3.28: Sezione a L: suddivisione in rettangoli.

$\mathbf{r}_{0G_1} = 24$
-50

535 r_{0G_2} =24
−6
10535 (3.101)
r_{0G} =
1
32800 @1000 ·24
−50
535 + 2280 ·24
−6
10535 1A =24
−19.41
74.5135 (3.102)
Si consideri ora il sistema di riferimento con origine nel baricentro {G, x, y}.
Rispetto
ad esso le posizioni dei baricentri G_1 e G_2 sono date da:
r_{G_1}= r_{0G_1} − r_{0G} =24
−50
535 −24
−19.41
74.5135 =24
−30.59
−69.5135
r_{G_2}= r_{0G_2} − r_{0G} =24
−6
10535 −24
−19.41
74.5135 =24
13.41
30.4935
(3.103)
Il tensore d'inerzia rispetto a G viene calcolato come somma dei due contributi
dei
due rettangoli: $J_G = J^{(1)}$
$_G + J^{(2)}$
$_G$. Applicando il teorema del trasporto, con la stessa
procedura utilizzata per la sezione a doppia T, si ottiene:
$J_G = J^{(1)}$
$_{G_1} + A_1 (r_{G_1}\ r_{G_1}) + J^{(2)}$
$_{G_2} + A_2 (r_{G_2}\ r_{G_2})$ (3.104)

Si ha:
J_{G_1} =26664
10 · 100^3
12
0
0
100 · 10^3
12
37775
J_{G_2} =26664
190 · 12^3
12

0
0
12 · 190^3
12
37775
(3.105)
e dalla (3.104) si ottiene:
J_G =24
2.206 E 6 3.059 E 6
3.059 E 6 13.819 E 635 (3.106)
y
x
ξ
η
α_p
Figura 3.29: Sezione a L: ellisse d'inerzia.
Il cerchio di Mohr è riportato in figura 3.30. I momenti principali si ricavano mediante
le (3.53):
J_G=
2.206 + 13.819
2 −s2.206 − 13.819
2 2
+ 3.059^2 = 1.450 E 6mm^4
J_G=
2.206 + 13.819
2
+s2.206 − 13.819
2 2
+ 3.059^2 = 14.575 E 6mm^4
(3.107)
e le direzioni principali si ottengono graficamente mediante la costruzione descritta
dopo le relazioni (3.53).

$J_{G\,nm}$
$J_{G\,n}$
$J_{G\,x}$ = 2.206
$J_{G\,xy}$ =3.059
$J_{G\,y}$ = 13.819
$J_{G\,\eta}$ =14.575
η
ξ
$J_{G\,\xi}$ =1.450
5.0
5.0 10.0 15.0
-5.0
13.90o
P
Figura 3.30: Sezione a L: cerchio di Mohr.
Il valore numerico dell'angolo $_p$ formato dall'asse con l'asse x è dato dalla formula (3.56):
$_p$ = tang $^{-1}$ J_G − J_{Gx}
J_{Gxy} = tang $^{-1}$ 1.450 E 6 − 2.206 E 6

3.059 E 6 = −13.88o (3.108)
I raggi d'inerzia sono dati da:
= r1.450 E 6
3280
= 21.03mm = r14.575 E 6
3280
= 66.66mm (3.109)
L'ellisse d'inerzia è riportata in figura 3.29. Si noti che gli assi ottenuti sul cerchio
di Mohr vanno ruotati di 180o per ottenere quelli dell'ellisse d'inerzia, in quanto anche
gli assi x ed y in figura sono stati disegnati ruotati di 180o[7].

3.2.6 Esercizi proposti

Si determinino le proprietà geometriche ed inerziali delle sezioni riportate nelle figure
3.31-3.33.
Nell'esercizio 3.2.1 si suggerisce di utilizzare la procedura analoga a quella adoperata
per la sezione a corona circolare, ovvero di calcolare il tensore d'inerzia come
differenza tra quello della sezione rettangolare piena e quello della parte rettangolare
vuota all'interno della sezione.
Nell'esercizio 2 si suggerisce di tener conto dell'asse di simmetria della sezione, che
conterrà il baricentro, e di scegliere come sistema di riferimento iniziale $\{O, x_0, y_0\}$ uno
con l'origine sull'asse di simmetria e con l'asse y_0 coincidente con l'asse di simmetria
stesso. In tal modo, la coordinata x_{0G} del baricentro sarà sicuramente nulla mentre

[7] Questo potrebbe evitarsi disegnando sulla sezione l'asse x orientato verso destra e quello y orientato
verso l'alto. Classicamente però l'asse y viene orientato verso il basso per uniformarsi alla convenzione
della modellazione monodimensionale della trave.

la coordinata y_{0G} va calcolata imponendo l'annullamento della componente S_{Oy_0} del
momento statico.

10
150
10
10 80 10

Figura 3.31: Esercizio 3.2.1.

100
10
40 8 40

Figura 3.32: Esercizio 3.2.2.

3.3 Sforzo normale e flessione

Si consideri il caso in cui le uniche caratteristiche della sollecitazione non nulle sono lo
sforzo normale N ed il momento flettente M_f (figura 3.34).
La soluzione esatta del problema del De Saint Venant in tale caso fornisce uno

stato
di tensione ovunque monoassiale in direzione z. L’unica componente della matrice della
tensione è dunque la $_z$. Inoltre, la $_z$ varia linearmente con x ed y, ovvero nel piano
della generica sezione retta, mentre non dipende da z, per cui lo stato tensionale si ripete

100
10
80 8 20
Figura 3.33: Esercizio 3.2.3.
x
y
z
z
k
N
Mf
G
Figura 3.34: Sollecitazione di sforzo normale e flessione.
costantemente su ogni sezione. Si ha dunque:
$_z$ = 0 8x 2 $_z$ = $_z$(x, y) = $_o$ + h_1 x + h_2 y)
@$_z$
@z
= 0 (3.110)
La seconda di tali relazioni può anche scriversi:
$_z$ = $_o$ + h · r con: h = 24
h_1
h_2
35
r = 24
x
y35 (3.111)
Si noti che, poiché r e h definiscono vettori paraleli al piano x y aventi quindi la terza
componente secondo z sempre nulla, essi sono stati e verranno nel seguito considerati
vettori del piano, aventi quindi solo due componenti.
Lo sforzo normale è legato al campo delle $_z$ dalla $(3.30)_1$, sviluppando la quale si ricava:
N = Z_A
$_z$ dA = Z_A
($_o$ + h · r) dA = Z_A
$_o$ dA + Z_A
h · r dA (3.112)

I termini $_o$ e h non dipendono da r e possono essere portati fuori dall’integrale:
N = $_o$ Z_A
dA + h · Z_A
r dA = $_o$ A + h · S_G (3.113)

Poiché r = x−x_G rappresenta il vettore posizione rispetto al baricentro nel piano della
sezione, S_G è il momento statico rispetto al baricentro della sezione e quindi è nullo in
base alla definizione di baricentro. Si ottiene in definitiva:
N = $_o$ A) $_o$ =
N
A
(3.114)
La relazione (3.30)$_2$ che fornisce la relazione tra il momento flettenteM_f ed il campo
delle $_z$ può riscriversi come segue:
M_f =24
M_x
M_y
35
= Z_A
24
y
−x35 $_z$ dA = Z_A
R_T r $_z$ dA (3.115)
dove:
R_T =24
0 1
−1 035) R_T r =24
0 1
−1 035
24
x
y35 =24
y
−x35 (3.116)
Avendosi anche:
R_T =24
0 1
−1 035 =24
cos
$_2$ sen
$_2$
−sen
$_2$ cos
$_2$
35
(3.117)
si chiarisce che R è la matrice associata al tensore che ruota un vettore del piano di /2
in senso orario (figura 3.35), e risulta la trasposta del tensore che ruota un vettore di /2
in senso antiorario, ovvero di :
R =24
0 −1
1 035 (3.118)

Chiaramente si ha:
RRT r = r (3.119)
in quanto RRT è il tensore che ruota un vettore nel piano prima di /2 in senso orario
e poi di /2 in senso antiorario, e quindi restituisce lo stesso vettore.
Pertanto, moltiplicando a sinistra ambo i membri della (3.115) per R, si ha:
RMf = ZA
RRT r z dA = ZA
r z dA (3.120)
dove RMf fornisce il vettore ruotato diMf di /2 in senso antiorario (figura 3.36).
Sostituendo l'espressione (3.111) di z e sviluppando si ha:
RMf= ZA
r (o + h · r) dA = ZA
o r dA + ZA
r (r · h) dA =
= ZA
o r dA + ZA
(r r) h dA
(3.121)

G
r
RT r R r
π2
π2
Figura 3.35: Rotazione di un vettore del piano mediante i tensori R e RT .
R M
π2
Mf
f
Figura 3.36: Rotazione diMf di /2 in senso antiorario mediante R.
I termini o e h non dipendono da r e possono essere portati fuori dall'integrale:
RMf = o ZA
r dA + ZA
(r r) dA h = o SG + JG h (3.122)
Essendo SG = 0 si ottiene:
RMf = JG h) h = (JG)−1RMf (3.123)
Sostituendo nella (3.111) le relazioni (3.114) e (3.123) ottenute, si ricava per la z la
seguente espressione:
z =
N
A
+ (JG)−1RMf · r (3.124)
L'asse baricentrico del piano della sezione parallelo al vettore RMf , ovvero ortogonale
al vettore momento flettenteMf è detto 'asse di sollecitazione', è indicato con s ed
orientato nella direzione di RMf . La retta luogo dei punti in cui si annulla la z = 0 è

detta 'asse neutro' ed è indicato con n. L'asse ortogonale a n, orientato in modo che n

si sovrapponga ad esso ruotando di /2 in senso antiorario, è detto ‘asse di flessione’ ed
è indicato con f. Il nome asse di flessione nasce dal fatto che il piano fz è il cosiddetto
piano di flessione, ovvero quello in cui si flette l’asse della trave.
In un riferimento non principale la matrice associata a $(J_G)_{-1}$ è data da:
$(J_G)_{-1} =$
1
$J_{Gx} J_{Gy} - J_2$
$_{Gxy}$24
$J_{Gy} - J_{Gxy}$
$-J_{Gxy} J_{Gx}$
35
(3.125)
In un riferimento principale $J_{Gxy} = 0$ e si ha:
$(J_G)_{-1} =$26664
1
J_{Gx}
0
0
1
J_{Gy}
37775
(3.126)
Essendo:
$RM_f =$24
$-M_y$
M_x
35
(3.127)
in un riferimento principale la (3.124) diventa:
$_z =$
N
A $-$
M_y
J_{Gx}
x +
M_x
J_{Gy}
y (3.128)
Si esaminano di seguito alcuni casi particolari.

3.3.1 Sforzo normale centrato

Si ha sforzo normale centrato quanto N 6= 0 e $M_f = 0$. Dalla (3.124) si ricava una $_z$
costante sulla sezione pari a:
$_z =$
N
A
(3.129)
In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione non sono definiti e l’asse neutro è

la retta impropria del piano.
La tensione equivalente è pari al modulo della $_z$, per cui la verifica di resistenza per materiali duttili si effettua controllando che si abbia:

$$_{eq} = |_z| = \frac{|N|}{A} \quad _{am} \quad (3.130)$$

Le componenti della deformazione si ricavano attraverso il legame elastico e sono date da:

$$''_z = \frac{N}{E A} = ''_a \quad ''_x = ''_y = -\frac{N}{E A} = -\ ''_a \quad _{ij} = 0 \ 8i\ 6= j \quad (3.131)$$

avendo indicato con $''_a$ la dilatazione assiale nella trave, legata allo sforzo normale dalla relazione:

$$''_a = \frac{N}{E A} \quad (3.132)$$

3.3.2 Flessione retta

Si ha flessione retta quando N = 0 ed il vettore momento flettente è diretto secondo una direzione principale.

Flessione retta intorno ad x

In un riferimento principale {G, x, y} si ha flessione retta intorno all'asse x quando:

$$N = 0 \quad M_x\ 6= 0 \quad M_y = 0 \quad (3.133)$$

Essendo in un riferimento principale si può utilizzare la (3.128), che fornisce la relazione:

$$_z = \frac{M_x}{J_{Gy}}\, y \quad (3.134)$$

nota come 'formula di Navier'.
In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione coincidono entrambi con y mentre l'asse neutro coincide con x. L'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono ortogonali fra loro.
La tensione equivalente è pari al modulo della $_z$, per cui la verifica di resistenza per materiali duttili si effettua controllando che si abbia:

$$_{eq} = |_z| = \frac{|M_x|}{J_{Gy}}\, |y_{max}| \quad _{am} \quad (3.135)$$

avendo indicato con $|y_{max}|$ il massimo valore assoluto di y sulla sezione.
Si definisce 'modulo di resistenza' rispetto a x e si indica con W_x lo scalare:

$W_x =$
J_{Gy}
$|y_{max}|$
(3.136)
La (3.135) può allora riscriversi:
$|M_x|$
W_x am (3.137)
Per le sezioni dei profilati metallici disponibili in commercio il modulo di resistenza è
tabellato, insieme a tutte le altre caratteristiche geometriche ed inerziali delle sezioni
stesse.
Le componenti della deformazione si ricavano attraverso il legame elastico e sono
date da:
"$_z$ =
M_x
$E J_{Gy}$
$y = _y y$ "$_x$ = "$_y$ = −
M_x
$E J_{Gy}$
$y = − _y y$ $_{ij}$ = 0 8i 6= j
(3.138)
vendo indicato con $_y$ la curvatura nel piano yz, legata al momento M_x dalla relazione:
$_y$ =
M_x
$E J_{Gy}$
(3.139)

x = n
y = s = f
Mf G
$\sigma_z > 0$
$\sigma_z < 0$
Figura 3.37: Sezione rettangolare soggetta a flessione retta intorno ad x.
Flessione retta intorno ad y
In un riferimento principale {G, x, y} si ha flessione retta intorno all'asse y quando:
N = 0 M_x = 0 M_y 6= 0 (3.140)
Dalla (3.128) si ottiene:
$_z$ = −
M_y
J_{Gx}
x (3.141)
In questo caso gli assi di sollecitazione e di flessione coincidono entrambi con −x
mentre l'asse neutro coincide con y. L'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono
ortogonali fra loro.
La tensione equivalente è pari al modulo della $_z$, per cui la verifica di resistenza

per
materiali duttili si effettua controllando che si abbia:
$_{eq} = |_z| = |M_y|$
$J_{Gx}\, |x_{max}|\;\; _{am}$ (3.142)
avendo indicato con $|x_{max}|$ il massimo valore assoluto di x sulla sezione.
Introducendo il 'modulo di resistenza' rispetto a y, indicato con W_y:
$W_y =$
J_{Gx}
$|x_{max}|$
(3.143)
La (3.142) può allora riscriversi:
$|M_y|$
$W_x\;\; _{am}$ (3.144)
Le componenti della deformazione sono date da:
$"_z = -$
M_y
$E\, J_{Gx}$
$x = -_x\, x \;\; "_x = "_y =$
M_y
$E\, J_{Gx}$
$x = \;\; _x\, x \;\; _{ij} = 0 \;\; 8i \;\; 6= j$
(3.145)

vendo indicato con $_x$ la curvatura nel piano xz, legata al momento M_y dalla relazione:
$_x =$
M_y
$E\, J_{Gx}$
(3.146)
x
y = n
G
Mf
$\sigma_z > 0$
$\sigma_z < 0$
s = f
Figura 3.38: Sezione rettangolare soggetta a flessione retta intorno ad y.
Relazione tra asse neutro ed asse di sollecitazione
In generale, si ha flessione retta quando l'asse di sollecitazione coincide con un asse
principale d'inerzia. In tal caso l'asse neutro e l'asse di sollecitazione sono ortogonali
fra loro. Essendo assi principali, essi sono anche coniugati rispetto all'ellisse d'inerzia.
Inoltre nella flessione retta l'asse di flessione coincide con l'asse di sollecitazione.
E' utile sottolineare che, poiché la tensione $_z$ varia linearmente sulla sezione, le curve di livello della $_z$, ovvero i luoghi dei punti $_z$ = cost., sono rette parallele all'asse neutro.

3.3.3 Flessione deviata

Si ha flessione deviata quando N = 0 ed il vettore momento flettente è diverso da zero
e non è diretto secondo un'asse principale d'inerzia (3.39). Dalla (3.124) si ricava:

$\sigma_z = (J_G)^{-1} R M_f \cdot r$ (3.147)

x
y
G
f M
M_x
M_y

Figura 3.39: Sezione rettangolare soggetta a flessione deviata.

In un riferimento principale la (3.147) si scrive:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_{Gx}} x + \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.148)$$

e fornisce il campo delle σ_z come sovrapposizione quelli associati a due flessioni rette.
Il versore s dell'asse di sollecitazione s è dato da:

$$s = \frac{RM_f}{\|RM_f\|} \quad (3.149)$$

L'equazione dell'asse neutro n è invece:

$(J_G)^{-1} R M_f \cdot r = 0$ (3.150)

e dividendo per $\|RM_f\|$ fornisce:

$(J_G)^{-1} s \cdot r = 0$ (3.151)

Si nota dalle (3.150) e (3.151) che l'asse neutro contiene il baricentro della sezione.
Il versore n di n (definito a meno del segno) soddisfa la relazione:

$(J_G)^{-1} s \cdot n = 0$ (3.152)

ovvero la relazione di coniugio tra s ed n rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione.
Nella flessione deviata, dunque, l'asse neutro n e l'asse di sollecitazione s risultano
coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia. Assegnato l'asse di sollecitazione s,
l'asse neutro può dunque determinarsi attraverso la construzione grafica mostrata in
precedenza in figura 3.18 e riportata di seguito in figura 3.40 per l'esempio della sezione
rettangolare di figura 3.39.

x

y
G
s
n f
f **M**

Figura 3.40: Sezione rettangolare soggetta a flessione deviata: determinazione grafica
dell'asse neutro.

L'asse di flessione, ortogonale all'asse neutro, non coincide con l'asse di sollecitazione.

Formula monomia della flessione deviata

Supponendo di conoscere l'asse neutro n in un caso di flessione deviata, si assuma
un sistema di riferimento non principale con l'asse x coincidente con n, e si orienti n
concordemente a x. Le linee di livello della $_z$, di equazione $_z$ = cost., sono parallele
a n (figura 3.41) e dunque, con la scelta fatta, sono anche parallele ad x. Dunque $_z$ non
dipende da x e risulta solamente funzione lineare di y, per cui si ha:

$_z$ = y (3.153)

Imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno a n = x si ha:

$M_x = Z_A$
$_z$ y dA = Z_A
y^2 dA = Z_A
y^2 dA = J_{Gy} (3.154)

ovvero:

$$= \frac{M_x}{J_{Gy}} \quad (3.155)$$

da cui, sostituendo nella (3.153), si ottiene la cosiddetta 'formula monomia'[8]:

$$_z = \frac{M_x}{J_{Gy}} y \quad (3.156)$$

Essendo $M_n = M_x$, e ponendo inoltre $I_{Gx} = J_{Gy}$ e $y = d_n$, si ottiene la seguente altra espressione della formula monomia:

$$_z = \frac{M_n}{I_{Gx}} d_n \quad (3.157)$$

x = n
G
s
y = f
f **M**
M_n

linee di livello
$\sigma_z =$ costante

Figura 3.41: Ponendo x = n la $_z$ è funzione lineare di y.

3.3.4 Sforzo normale eccentrico

Si ha sforzo normale eccentrico quando il sistema delle $_z$ sulla sezione è equivalente ad una risultante N 6= 0 applicata nel baricentro e ad un momento flettenteM_f 6= 0. La sollecitazione in questo caso si dice anche 'tensoflessione' se N > 0, o 'pressoflessione' se N < 0.

[8]Si noti che la formula monomia della flessione deviata risulta formalmente identica alla formula di Navier. Tuttavia, nella formula di Navier M_x è l'unica componente non nulla del momento flettente, mentre nella formula monomia $M_x = M_n$ non è l'unica componente, essendo anche M_y 6= 0.

Sovrapposizione degli effetti

In tal caso si può operare per sovrapposizione degli effetti ed ottenere, in un sistema di riferimento principale, il campo delle $_z$ mediante la (3.128):

$_z$ =
N
A −
M_y
J_{Gx}
x +
M_x
J_{Gy}
y (3.158)

Si ha quindi sovrapposizione di uno sforzo normale e di una flessione retta, se una delle componentiM_x eM_y è nulla, o di uno sforzo normale centrato e di due flessioni rette, se entrambe le componenti M_x e M_y sono non nulle. In quest'ultimo caso si può operare per sovrapposizione di uno sforzo normale centrato e di una flessione deviata.

Espressione della $_z$ in un riferimento non principale

Volendo evitare di determinare gli assi principali di inerzia si può utilizzare la (3.124) espressa in un riferimento non principale:

$_z$ =
N
A
+
1
J_{Gx} J_{Gy} − J^2_{Gxy}24
J_{Gy} −J_{Gxy}
−J_{Gxy} J_{Gx}
35
24

$-M_y$
M_x
35
24
x
y35 (3.159)

Sistema di un’unica forza eccentrica

Alternativamente ci si può ricondurre ad un sistema di un’unica forza N diretta secondo
z ma applicata in un punto C diverso da G, detto ‘centro di sollecitazione’. Detto r_C il
vettore posizione di C rispetto a G, si dimostra facilmente attraverso la condizione di
equivalenza del momento risultante rispetto a G che si ha:

$r_C =$
RM_f
N) 24
x_C
y_C
35
=
1
N24
$-M_y$
M_x
35
(3.160)

L’asse di sollecitazione passa dunque per G e per C.
L’ultima relazione può anche scriversi:

$M_x = N\, y_C \quad M_y = -N\, x_C$ (3.161)

Assumendo un sistema di riferimento principale, e sostituendo le (3.161) nella (3.128)
si ottiene:

$_z =$
N
A
+
$N\, x_C\, x$
J_{Gx}
+
$N\, y_C\, y$
J_{Gy}
=
N
A
+
$N\, x_C\, x$
A^2
x
+
$N\, y_C\, y$
A^2_y

(3.162)

avendo sfruttato le definizioni di raggi d'inerzia $_x$ e $_y$. Mettendo in evidenza N/A si ottiene:

$$_z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{x_C\, x}{{}^2_x} + \frac{y_C\, y}{{}^2_y}\right) \quad (3.163)$$

Eguagliando a zero l'espressione precedente della $_z$ si ricava l'equazione dell'asse neutro nel caso di sforzo normale eccentrico:

$$1 + \frac{x_C\, x}{{}^2_x} + \frac{y_C\, y}{{}^2_y} = 0 \quad (3.164)$$

G
C
$_f\mathbf{M}$ $_f\mathbf{R}$ $\mathbf{M}$
N
x
y
y_C
x_C
s

Figura 3.42: Posizione del centro di sollecitazione.

Confrontando tale ultima relazione con la (3.74), si deduce che l'asse neutro si ottiene come antipolare del centro di sollecitazione C. Esso può dunque trovarsi mediante la costruzione grafica descritta in 3.20. In particolare, da tale costruzione, si evince che l'asse neutro non passa per il baricentro e si trova sempre dalla parte opposta di C rispetto a G.

Si dimostra anche facilmente che l'asse parallelo a n e passante per il baricentro è coniugato di s rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

3.3.5 Alcuni esempi

Problema 1

Si consideri la struttura di figura 3.43 caratterizzata da due travi portanti con un ritto
ed un traverso ciascuna. Su di esse è appoggiata una piastra secondaria, che con buona
approssimazione può essere studiata come trave appoggiata. Su tale piastra agisce un
carico distribuito per unità di superficie q_s, mentre su un bordo della piastra agisce un
carico lineare q_{lin} come descritto in figura, in un piano che contiene gli assi delle travi
verticali. Si trascura il peso proprio della struttura.
Si considerano i seguenti dati:
$q_s = 12KN\ m_{-2}$ $a = 3m$ $q_{lin} = 50KN\ m_{-1}$ $L = 1.5m$
Per il materiale si assume una tensione ammissibile di $_{am}$ = 200MPa. La sezione della trave è quella che è stata studiata nella sezione 3.2.5.
Il carico q_s si ripartisce sulle due travi come carico a metro lineare $q = q_s\, a/2 = 12 \cdot 3/2 = 18KN\ m_{-1}$. Il carico q_{lin} si ripartisce in testa alle travi come due forze

concentrate $F = q_{lin}\, a/2 = 50 \cdot 3/2 = 75KN$. Sulla sezione d'incastro indicata in figura 3.43.d si hanno le seguenti caratteristiche della sollecitazione:
$N= -q\ L - F = -18 \cdot 1.5 - 75 = -102KN$
$M_x= -$
$q\ L_2$
2
$= 20.25KN\ m$
$M_y= 0$
Carico superficiale q s
a
h
L
h
L
x
y
z
q =
q a
2
s
46 8 46
10 120 10
Sezione z = 0
M x =
q L2
2
N = q L F
h
q =
q a
2
s
L
y
z
x
y
(a)
(b)
(c)
(d)
Carico superficiale q lin

$F = \frac{q_{lin} a}{2}$

$F = \frac{q_{lin} a}{2}$

Figura 3.43: Problema 1: (a) struttura spaziale completa; (b) una delle due travi portanti; (c) schema della trave portante; (d) sezione d'incastro e relative caratteristiche della sollecitazione.

Sovrapposizione degli effetti

La sollecitazione può vedersi come sovrapposizione di uno sforzo normale centrato e di una flessione retta intorno a x.

Per effetto solamente dello sforzo normale, si avrebbe sulla sezione il diagramma costante di $_z$ riportato in figura 3.44, con $_z$ pari a:

$$_{z,N} = \frac{N}{A} = -\frac{102}{2960} = -0.034 KN\ mm^{-2} = -34 MPa$$

Per effetto solamente del momento flettente M_x si avrebbe il diagramma lineare riportato in figura 3.44. Per l'emisimmetria del diagramma il massimo valore della tensione di trazione coincide con il massimo valore assoluto della tensione di compressione.

Tali valori si ottengono dalla relazione:

$$_{z,M_x} = \frac{|M_x|}{W_x} \tag{3.165}$$

Il modulo di resistenza W_x, tenendo conto della componente J_{Gy} del tensore d'inerzia calcolata nelle (3.94) e che $|y_{max}| = 7$ cm, è dato da:

$$W_x = \frac{961}{7} = 137.3\ cm^3$$

e dunque:

$$_{z,M_x} = \frac{|M_x|}{W_{max}} = \frac{2025}{137.3} = 14.7 KN\ cm^{-2} = 147 N\ mm^{-2} = 147 MPa$$

Sommando i due diagrammi si ha il diagramma di figura 3.44. La massima tensione è di compressione e fornisce, in assenza di tensioni tangenziali, una massima

tensione
equivalente pari a:
$_{eq,max} = 34 + 147 = 181\text{MPa} < _{am}$
per cui la verifica di resistenza risulta soddisfatta.

x
y
G
34
$\sigma_z < 0$
147
$\sigma_z > 0$
Figura 3.44: Diagramma delle tensioni $_z$: sovrapposizione degli effetti.
Determinazione dell'asse neutro come antipolare del centro di sollecitazione
La posizione dell'asse neutro può essere determinata considerando le caratteristiche
della sollecitazione equivalenti ad uno sforzo normale eccentrico. La posizione del
centro di sollecitazione è data da:
$x_C = 0$ $y_C =$
M_x
N
$= -20250$
-102
$= 199\text{mm}$
Essendo $x_C = 0$, l'equazione dell'asse neutro diventa:
1 +
y_C y
$_{2y}$
$= 0$) $y_C\, y = -_{2y}$
Si vede quindi che l'asse neutro è parallelo all'asse x e la sua intersezione con l'asse y
è data da:
y = −
$_{2y}$
y_C
= −
57_2
199
$= -16\text{mm}$
La posizione dell'asse neutro può anche trovarsi con la costruzione grafica illustrata
in precedenza in figura 3.20. Nel caso in esame, essa si specializza come illustrato in
figura 3.45.
Problema 2
Si consideri la stessa struttura del problema 1, nella quale però la sezione d'incastro
sia la sezione a L studiata nella parte 3.2.5, disposta in modo che il suo baricentro sia
coincidente con quello della sezione a doppia T e che gli assi x ed y usati per studiare la
sezione a L coincidano con quelli della sezione a doppia T. Avendosi le stesse

caratteristiche
della sollecitazione del problema 1, le coordinate del centro di sollecitazione sono
sempre $x_C = 0$ e $y_C = 199$mm. La determinazione grafica della posizione dell'asse
neutro a partire dall'ellisse d'inerzia e mostrata in figura 3.46.

x
y
G
n
199 16
C
$\sigma_z < 0$
$\sigma_z > 0$

Figura 3.45: Determinazione grafica e verifica analitica della posizione dell'asse neutro.

Dal diagramma delle tensioni determinato in figura 3.46 si deduce che i valori massimo
e minimo della tensione $_z$ si hanno nei punti A e B. I loro vettori posizione espressi
nel riferimento {O, x_0, y_0} di figura 3.28 sono:

$r_{0A} = 24$
0
035 $r_{0B} = 24$
−12
20035 (3.166)

Noto il vettore posizione r_{0G} del baricentro, sempre rispetto a {O, x_0, y_0}, dalla (3.102),
i vettori posizione espressi rispetto al sistema {G, x, y} si ottengono da:

$r_A = r_{0A} - r_{0G} = 24$
0
035 − 24
−19.41
74.51 35 = 24
19.41
−74.5135
$r_B = r_{0B} - r_{0G} = 24$
−12
20035 − 24
−19.41
74.51 35 = 24
7.41
125.4935
(3.167)

Per calcolare i valori della $_z$ mediante la (3.158) bisognerebbe esprimere sia r_A ed
r_B che il momento M_f nel sistema principale {G, , }, ruotato rispetto a {G, x, y} di
-13.9^o. Conviene allora utilizzare direttamente la (3.159). Note le componenti di J_G

y

x
ξ
n η C (0,199)
199
A
B
Figura 3.46: Determinazione grafica della posizione dell’asse neutro per la sezione a L.
rispetto a {G, x, y} dalla (3.106), si ha:
$N = -102KN$ $M_x = -20205KN$ mm $M_y = 0$ $A = 3280mm^2$
$J_G = 24$
2.206 E 6 3.059 E 6
3.059 E 6 13.819 E 635 $r_A = 24$
19.41
−74.5135 $r_B = 24$
7.41
125.4935 (3.168)
Dalla (3.159) si ottiene allora:
$_{z,A} = -$
102
3280
+
1.0 E − 6
$2.206 \cdot 13.819 - 3.059^2$ 24
13.819 −3.059
−3.059 2.206 35
24
0
−2020535 · 24
19.41
−74.5135 =
$= -0.031 + 0.213 = 0.182KN\ mm^{-2} = 182MPa$
(3.169)
$_{z,B} = -$
102
3280
+
1.0 E − 6
$2.206 \cdot 13.819 - 3.059^2$ 24
13.819 −3.059
−3.059 2.206 35
24
0
−2020535 · 24
7.41
125.4935 =
$= -0.031 - 0.243 = 0.274KN\ mm^{-2} = -274MPa$
(3.170)
Se si assume ancora $_{am} = 200MPa$, si ottiene dunque:
$_{eq,A} = 182MPa < {}_{am}$ $_{eq,B} = 274MPa > {}_{am}$ (3.171)

per cui la verifica di resistenza è soddisfatta in A ma non lo è in B.
La tensione $_{z,G}$ nel baricentro vale:
$_{z,G} =$
N
A
= −
102

3280
= −0.031KN mm^{-2} = −31MPa (3.172)
e si ottiene graficamente intersecando il diagramma delle tensioni di figura (3.97) con
una retta parallela ad n passante per il baricentro G.

3.4 Torsione

Si ha solo sollecitazione di ‘torsione’ quando sulle due basi della trave sono applicati
due momenti torcenti in equilibrio tra loro. Sulla generica sezione retta all’ascissa z
il campo dei vettori tensione t(k) è dunque equivalente ad un momento torcente M_t,
diretto secondo k. Il vettore del momento torcente è allora pari a M_t k (figura 3.47).

x
y
z
z
k
M_t **k**
M_t **k** G

Figura 3.47: Sollecitazione di torsione.

Per questo tipo di sollecitazione si studieranno i casi della trave con sezione circolare,
a corona circolare ed a sezione sottile biconnessa, mentre si accennerà solo alla
soluzione per una sezione di tipo arbitrario.

3.4.1 Sezione circolare o a corona circolare

Nel caso di una sezione circolare o a corona circolare conviene partire dalla cinematica.
In tale caso, infatti, la soluzione esatta del problema prevede che ogni sezione retta
all’ascissa z sia caratterizzata da una rotazione rigida (z) intorno all’asse z. La soluzione
è definita a meno di un arbitrario spostamento rigido della trave, che viene assunto
nullo, e vale in generale l’ipotesi di piccoli spostamenti. La rotazione risulta essere una
funzione lineare di z per cui si ha:

(z) = $_0$ z (3.173)

dove $_0$ è detto ‘angolo specifico di torsione’, o anche ‘curvatura torsionale’, e rappresenta
la rotazione relativa tra due sezioni poste a distanza unitaria.

Il campo di spostamenti è dunque dato da:

u(r, z) = $_0$ z k × r (3.174)

Sviluppando il prodotto vettoriale si ottiene:

u = $_0$ z k × r = $_0$ z det26664
i j k
0 0 1
x y 0
37775

= $_0$ z26664
−y
x
0
37775
= $_0$ z Rr (3.175)
dove R è il tensore introdotto nella (3.118) che ruota un vettore di /2 in senso antiorario[9].
In componenti si ha: 8>><>>:
$u_x = -_0\, y\, z$
$u_y = {}_0\, x\, z$
$u_z = 0$
(3.177)
Le uniche componenti non nulle del tensore della deformazione infinitesima sono:
$_{zx}$ =
@u_x
@z
+
@u_z
@x
= −$_0$ y $_{zy}$ =
@u_y
@z
+
@u_z
@y
= $_0$ x (3.178)
che raccolte in forma vettoriale, e riferendosi per semplicità a vettori nel piano della
sezione, forniscono:
$_z$ = $_0$24
−y
x35 = $_0$Rr con: $_z$ =24
zx
zy
35
(3.179)
Dal legame elastico si ottiene che le uniche componenti non nulle del tensore della
tensione in ogni punto della sezione retta sono le componenti $_{zx}$ e $_{zy}$:
24
zx
zy
35
= G24
zx
zy
35
=24
−G$_0$ y
G$_0$ x35 (3.180)
ovvero, in forma vettoriale:

$\tau_z = G\theta_0 R r$ (3.181)

[9] In questo caso, per maggiore chiarezza, si è dovuto considerare esplicitamente r come un vettore
dello spazio avente però terza componente nulla. In tal caso, dunque, la matrice associata ad R va
adattata al caso tridimensionale aggiungendo una riga ed una colonna di zeri:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

Le linee di flusso del campo delle τ_z, cioè le curve che sono in ogni punto tangenti
al vettore τ_z, sono circonferenze aventi tutte centro nel baricentro della sezione (figura
3.48). Esse sono dunque tangenti al contorno esterno e, nel caso della sezione a corona
circolare, al contorno interno.

x
y

Figura 3.48: Linee di flusso e diagramma delle tensioni tangenziali τ_z in una sezione
circolare.

Il momento torcente è dato dalla (3.30)[4]:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA = \int_A (G\theta_0\, x^2 + G\theta_0\, y^2)\, dA = = G\theta_0 \int_A (x^2 + y^2)\, dA = G\theta_0 \int_A \|r\|^2\, dA = GJ_{Gp}\theta_0 \quad (3.182)$$

da cui si ottiene:

$$M_t = C_t\theta_0 \quad \text{con:} \quad C_t = GJ_{Gp} \quad (3.183)$$

Il coefficiente $C_t = M_t/\theta_0$ è detto 'rigidezza torsionale'.

Si ricorda che J_{Gp} indica il momento d'inerzia polare:

$$J_{Gp} = \int_A \|r\|^2\, dA = \int_A (x^2 + y^2)\, dA \quad (3.184)$$

che per le sezioni circolare ed a corona circolare vale:

$$\text{sezione circolare: } J_{Gp} = \frac{\pi R^4}{2} \qquad \text{sezione a corona circolare: } J_{Gp} = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \quad (3.185)$$

Noti il momento torcente e la rigidezza torsionale, l'angolo specifico di torsione è dato da $_0 = M_t/C_t = M_t/(GJ_{Gp})$, e dunque il campo delle $_z$ è dato dalla relazione:

$_z = G$
M_t
GJ_{Gp}
$Rr =$
M_t
J_{Gp}
Rr (3.186)

Per la sezione circolare il valore massimo del modulo della tensione tangenziale vale:

$_{max} = k\ _z k_{max} =$
M_t
J_{Gp}
$R =$
$2M_t$
$R^4\ R$ (3.187)

ovvero:

$_{max} =$
$2M_t$
R^3 (3.188)

Per la sezione a corona circolare si ha:

$_{max} =$
$2M_t$
$(R^4_e - R^4_i)$
R_e (3.189)

Le relazioni precedenti possono anche essere scritte come segue:

$_{max} =$
M_t
W_t
(3.190)

dove con W_t si è indicato il cosiddetto ‘modulo di resistenza’ a torsione che vale nei
due casi:

sezione circolare: $W_t =$
R^3
2

sezione a corona circolare: $W_t =$
$(R^4_e - R^4_i)$
$2R_e$
(3.191)

3.4.2 Cenni al caso generale e analogia idrodinamica

Nel caso generale di una sezione diversa da quella circolare o a corona circolare il campo
di tensioni tangenziali (3.181) associato al campo di spostamenti (3.174) non soddisfa
le condizioni di tangenza al contorno. Per tale motivo la sezione retta, oltre a subire

una rotazione rigida, è anche caratterizzata da spostamenti in direzione
dell'asse z, che
determinano il cosiddetto 'ingobbamento' della sezione.
In virtù dell'ingobbamento le linee di flusso non sono più circonferenze e si
'adeguano'
invece al contorno esterno ed eventualmente ad uno o più contorni interni della
sezione. La soluzione matematica del problema è più complessa di quella
ottenuta per
le sezioni circolari ed è basata sul calcolo di una funzione ingobbamento che
dipende
esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione.
La soluzione esatta del problema fornisce un campo di tensioni normali z
identicamente
nullo, ed un campo di tensioni tangenziali z caratterizzato dalle seguenti
proprietà: 8>><>>:
div z = 0 8 x 2 A
rot z = 2G0 8 x 2 A
z · n = 0 8 x 2 @A
(3.192)

La prima di tali relazioni si ottiene dalla (3.17) ponendo z = 0 identicamente. La
terza
è la condizione al contorno (3.20).
La seconda delle (3.192) si dimostra essere una condizione di congruenza
interna,
legata al fatto che il campo delle tensioni tangenziali deve poter essere
ricavabile a
partire da un campo di spostamenti mediante il legame spostamenti-
deformazioni ed il
legame elastico tra deformazioni e tensioni.
Ai fini della determinazione qualitativa dell'andamento delle tensioni
tangenziali in
una sezione soggetta a torsione è utile considerare la seguente 'analogia
idrodinamica'.
Si consideri un recipiente cilindrico contenente un liquido che possa essere
schematizzato
come incomprimibile e non viscoso, in condizioni di quiete. Si faccia ruotare il
liquido intorno ad un asse parallelo alle generatrici del cilindro con una velocità
angolare
costante ! molto piccola e si interrompa istantaneamente tale moto rotatorio
(figura
3.49). Negli istanti successivi a quello in cui annulla la velocità angolare il
campo di
velocità su una sezione piana parallela alla base del cilindro è governato dalle
seguenti
equazioni: 8>><>>:
div v = 0 8 x 2 A
rot v = 2 ! 8 x 2 A
v · n = 0 8 x 2 @A
(3.193)
y

ω**k**
k
y
x
z
z
M_t **k** **k**
M_t **k** G
Figura 3.49: Analogia idrodinamica.
Le linee di flusso del campo delle $_z$ devono dunque essere le stesse delle linee di
flusso seguite dalle particelle di liquido sulla sezione del recipiente (figura 3.50).
Di seguito si analizzeranno solo, in modo approssimato, i casi delle sezioni sottili
biconnesse.

3.4.3 Sezione sottile biconnessa

Una sezione retta si dice 'sottile' quando l'area è concentrata in prossimità di una linea
del piano della sezione, detta 'linea media' della sezione (figura 3.51). Si ha una sezione

Figura 3.50: Linee di flusso delle tensioni tangenziali.
sottile biconnessa quando la linea media definisce una curva biconnessa del piano. Si
consideri allora il caso della generica sezione sottile biconnessa di figura 3.52.
Figura 3.51: Esempi di sezione sottile biconnessa.
Linea
media
corda
Orientamento
dell'ascissa curvilinea s
sulla linea media
δ (s)
n
t
Figura 3.52: Sezione biconnessa.

Si consideri un'ascissa curvilinea s lungo la linea media. Il segmento ortogonale alla
linea media avente come due estremi i due punti più vicini del contorno della sezione è
detto una 'corda' della sezione ed è intersecato dalla linea media nel prorio punto medio.
La sua lunghezza è detta 'spessore' della linea media ed indicata con . Lo spessore in
generale può variare lungo la linea media ed è quindi in generale funzione dell'ascissa
s. Detta L la lunghezza della linea media, per ipotesi (s) << L in ogni punto.
Variazione della tensione tangenziale sulla corda

Si consideri ora il riferimento con origine nel centro della generica corda all’ascissa s, e con assi paralleli alla base {n, t} indicata in figura 3.52 e definita dai vettori rispettivamente normale e tangente alla linea media, con t ottenuto ruotando n di /2 in senso antiorario. Si indichino inoltre con n e s le coordinate di un punto e con $_{zn}$ e $_{zs}$ le due componenti di $_{z}$ rispetto a tale riferimento. La (3.192) $_{2}$ fornisce:

$$\text{rot}\ _{z} = \frac{@_{zs}}{@n} + \frac{@_{zn}}{@s} = 2G_{0} \quad (3.194)$$

Nei due punti di intersezione della generica corda con il contorno della sezione la $_{z}$ deve essere tangente al contorno stesso e quindi, assumendo che l’eventuale variazione di sia estremamente graduale[10], si può porre $_{zn} = 0$ in tali punti. Per la piccolezza dello spessore si può poi estendere l’ipotesi $_{zn} = 0$ all’intera corda, e questo per ogni corda. Con tale ragionamento si ritiene lecito assumere nullo il termine $@_{zn}/@s$ nella (3.194) ed ottenere la seguente variazione lineare dell’unica componente rimasta, ovvero quella $_{zs}$ in direzione della tangente alla linea media (figura 3.53):

$$\frac{@_{zs}}{@n} = 2G_{0} \ ) \ _{zs} = 2G_{0}\, n + c \quad (3.195)$$

La costante c rappresenta chiaramente il valore assunto dalla $_{zs}$ al centro della corda, per n = 0, ed è anche uguale al valore medio della $_{zs}$ sulla corda:

$$_{zs} = 2G_{0}\, n + \ _{zs,med} \quad (3.196)$$

D’altra parte, in virtù dell’analogia idrodinamica e della piccolezza dello spessore, le linee di flusso in una sezione biconnessa si possono supporre con buona approssimazione parallele alla linea media, e sembra lecito assumere che la variazione della $_{zs}$ sia estremamente limitata. Evidentemente il valore medio $_{zs,med}$ è nettamente predominante rispetto alla variazione lineare massima sulla corda pari a G_{0}, ed appare lecito porre costantemente sulla corda $_{z} = \ _{zs,med} = \ _{z}(s)$.

In termini vettoriali, la $_{z}$ è diretta secondo la tangente t alla linea media per cui si ha:

$$_{z} = \ _{z}\, t \quad (3.197)$$

Poiché poi nel caso idrodinamico deve essere costante la portata lungo ogni corda della linea media, nel caso della torsione si avra la seguente legge di ‘costanza del flusso’:

$_z$(s) (s) = q = costante (3.198)

Pertanto, mentre in generale $_z$ e possono variare con s, cioè lungo la linea media, il loro prodotto, detto ‘flusso’ ed indicato con q, non varia e quindi non è funzione di s.

[10] Nelle applicazioni lo spessore è tipicamente costante o costante a tratti.

n

t

s

$\tau_{z}\ _{n} = 0$

$\tau\ _{zs,med}$

2G θ '

G θ ' δ

Figura 3.53: Variazione della tensione tangenziale sulla corda.

Formule di Bredt

Si consideri la linea media di una sezione sottile biconnessa, riportata in figura 3.54, e si orienti la linea media in senso antiorario. Si indicherà con A_m l’area racchiusa dalla linea media. Sia inoltre n il versore uscente dal A_m in modo che il versore tangente t è diretto secondo il verso positivo della linea media.

n

t A_m

n

t

A_m

τ_z (s)**t**

dA = δ (s) ds

ds

r

x G

y

Figura 3.54: Derivazione delle formule di Bredt.

Integrando il valore della $_z$ su una porzione elementare di area pari a dA = (s) ds si ottiene un vettore forza

dF = $_z$(s) t (s) ds = q t ds (3.199)

Il momento elementare dM_t, rispetto all’origine G, fornito dalla forza dF è dato da:

dM_t = r × dF = r × q t ds (3.200)

ed è chiaramente parallelo all’asse z in quanto sia r che dF sono vettori del piano della sezione.

Il momento torcente si ottiene integrando la (3.200) lungo la linea media e moltiplicando scalarmente per k:

M_t = I$_{@A_m}$

[(r × q t) · k] ds (3.201)

Portando q fuori dall’integrale in quanto costante per la (3.198), ed applicando la permutazione nel prodotto misto per la quale si ha che (r × t) · k = (t × k) · r si ottiene:

M_t = q I$_{@A_m}$
[(t × k) · r] ds (3.202)

Si ha inoltre:

t × k = det26664
i j k
$-n_y$ n_x 0
0 0 1
37775
= n_x i + n_y j =26664
n_x
n_y
0
37775
= n (3.203)

da cui, applicando il teorema della divergenza, si ricava:

M_t = q I$_{@A_m}$
r · n ds = q Z$_{A_m}$
div r ds = 2 q A_m (3.204)

Si ha infatti:

div r = div26664
x
y
0
37775
=
@x
@x
+
@y
@y
= 2 (3.205)

Dalla (3.204) si ottiene la ‘prima formula di Bredt’:

q =
M_t
$2A_m$
(3.206)

che, tenendo conto della espressione (3.198) del flusso, può anche essere riscritta direttamente in termini di $_z$:

$_z$(s) =
M_t
$2A_m$ (s)
(3.207)

Seconda formula di Bredt

Per il teorema di Stokes, la circuitazione del vettore $_z$ può calcolarsi come integrale del rotore di $_z$ esteso all’area racchiusa dalla linea media, A_m. Tale circuitazione, per definizione, è data dall’integrale su @A_m del prodotto scalare $_z$ · t = $_{zs}$ = $_z$.

Inoltre,
il rotore della è costante e pari a $2G_0$, per cui si ottiene:
$I_{@A_m}$
$_z(s)$ ds = Z_{A_m}
rot $_z$ dA = Z_{A_m}
$2G_0$ dA = $2G_0$ Z_{A_m}
dA = $2G_0$ A_m (3.208)

Sostituendo nel primo membro della relazione precedente l'espressione di $_z$ fornita
dalla prima formula di Bredt, ovvero la (3.207), si ottiene:
$I_{@A_m}$
$_z(s)$ ds = $I_{@A_m}$
M_t
$2A_m$ (s)
ds =
M_t
$2A_m$ $I_{@A_m}$
1
(s)
ds (3.209)
Confrontando tale relazione con la (3.208) si ottiene:
$2G_0$ A_m =
M_t
$2A_m$ $I_{@A_m}$
ds
(s)
(3.210)
da cui l'espressione della 'rigidezza torsionale' della sezione biconnessa sottile:
C_t =
M_t
$_0$
=
$4GA^2$
$_m$ I_{A_m}
ds
(s)
(3.211)
nota come 'seconda formula di Bredt'.

3.5 Taglio

Si ha sollecitazione di taglio quando le risultanti sulle due basi della trave sono due forze
uguali ed opposte parallele alle basi stesse. Per l'equilibrio alla rotazione, vi dovranno
anche essere una o due coppie agenti sulle basi per cui la sollecitazione di taglio è
sempre anche accompagnata da quella di flessione, in tutte le sezioni rette della trave
tranne al più una. Nel caso di figura 3.55 si è considerata una coppia flettente agente
sulla base di sinistra.

x
y
z
z
G
T
T
Figura 3.55: Sollecitazione di taglio.
La soluzione esatta del problema per questo tipo di sollecitazione è piuttosto complessa,
per cui si prenderà in esame una trattazione approssimata, sviluppata all'ingegnere
russo Jourawski nella seconda metà dell'800, che è molto utilizzata nelle applicazioni
ingegneristiche. Essa si basa solamente su considerazioni di equilibrio.

3.5.1 Trattazione di Jourawski

Si consideri la generica sezione retta riportata in figura 3.56 ed un segmento AB, detto
anche corda, che la divida in due parti complementari A ed A. Il flusso del campo
delle $_z$ uscente da A è definito come:
$I_{@A}$
$_z \cdot n \, ds = Z_{@A_{cont}}$
$_z \cdot n \, ds + Z_{AB}$
$_z \cdot n \, ds$ (3.212)
dove si è decomposto il contorno di @A nell'unione di quello coincidente con parte
del contorno della sezione, indicato con $@A_{cont}$, e della corda AB, e dove n indica la
normale uscente.
A
B
A A*
B
A*
n
τ_z
τ_{zn}
τ_{zn}
$\tau_{zn,med}$
A**
A**
b
b
Figura 3.56: Flusso uscente da A.
Il primo termine a secondo membro della (3.212) è nullo in quanto le tensioni tangenziali
sono tangenti al contorno (equazione (3.20)). pertanto, indicando con $_{zn} = {}_z \cdot n$
la componente di $_z$ normale alla corda, e con $_{zn,med}$ il suo valore medio sulla corda,
la (3.213) fornisce: $I_{@A}$
$_z \cdot n \, ds = Z_{AB}$

$_{zn}$ ds = $_{zn,med}$ b (3.213)
dove b indica la lunghezza della corda AB.
D'altra parte, nel caso del taglio sono presenti in generale tutte e tre le componenti
$_z$, $_{zx}$ e $_{zy}$. Si è visto dunque nella (3.17) che la terza equazione differenziale di equilibrio fornisce la relazione:
div $_z$ = −
@$_z$
@z
(3.214)
Applicando allora il teorema della divergenza all'area A, si ottiene:
I$_{@A}$
$_z$ · n ds = Z$_A$
div $_z$ dA = −Z$_A$
@$_z$
@z
dA (3.215)

Conviene utilizzare l'espressione della $_z$ fornita dalla formula monomia della flessione
deviata, ovvero la (3.156), assumendo x coincidente con l'asse neutro della flessione
associata al taglio:
$_z$ =
M$_x$
J$_{Gy}$
y (3.216)
dalla quale si ottiene:
@$_z$
@z
=
@
@z M$_x$
J$_{Gy}$
y=
y
J$_{Gy}$
dM$_x$
dz
(3.217)
in quanto sia J$_{Gy}$ che y non dipendono da z. Si verifica poi facilmente che la derivata
del momento M$_x$ rispetto a z è pari alla componente T$_y$ del taglio:
dM$_x$
dz
= T$_y$ (3.218)
La (3.218) infatti è la ben nota relazione che lega la derivata del momento al taglio,
scritta però qui nel caso spaziale e con riferimento al piano yz. Così come fatto nel
capitolo delle travature piane, essa si ricava imponendo l'equilibrio alla rotazione del

concio elementare di trave intorno all’asse x.
Combinando le relazioni (3.215)-(3.218) si ottiene:

I@A
$_z \cdot n\, ds = -$
T_y
J_{Gy} Z_A
$y\, dA = -$
$T_y\, S_y$
J_{Gy}
(3.219)

dove S_y rappresenta il momento statico dell’area A lungo y.
Confrontando la relazione precedente con la (3.213) si ottiene la relazione:

$_{zn,med} = -$
$T_y\, S_y$
$J_{Gy}\, b$
(3.220)

Questa relazione è esatta in quanto non si è fatta alcuna approssimazione fino a questo punto. Essa però fornisce il valore medio della $_{zn}$ lungo la corda ma non il valore puntuale, che in generale sarà variabile lungo la corda stessa. L’approssimazione che viene allora fatta nella maggioranza delle applicazioni è quella di ritenere, laddove lo si ritenga accettabile con la precisione richiesta nel calcolo, che la $_{zn}$ risulti costante lungo la corda. In tal modo si può sostituire il valore medio $_{zn,med}$ con quello puntuale $_{zn}$ nella (3.220) ed ottenere dunque la seguente relazione, nota come ‘formula di Jourawski’:

$_{zn} = -$
$T_y\, S_y$
$J_{Gy}\, b$
(3.221)

Come si è detto, la formula di Jourawski è basata su sole considerazioni di equilibrio. In particolare, la trattazione svolta equivale alla scrittura delle condizioni di equilibrio per l’elemento longitudinale di area A e lunghezza dz riportato tridimensionalmente in figura 3.57.

σ_z
z
$\int \sigma_z(z) + dz_{A^*}$
$\int \sigma_z(z)\, \tau_{zn}\, dA_{A^*}$
dA
Sezione
all'ascissa z
Sezione
all'ascissa z+dz
b
dz
b dz
A*

Figura 3.57: Equilibrio alla traslazione dell’elemento longitudinale di area A e lunghezza dz.