Corso di Laurea di I livello in Ingegneria Meccanica
note alle lezioni di:
Complementi di Meccanica Applicata alle Macchine, 3CFU

Premessa

Il corso di Complementi di Meccanica Applicata alle Macchine vuole rappresentare un momento applicativo per la teoria che gli allievi Ingegneri Meccanici del II anno hanno appreso nel corsi precedenti. Il robot industriale viene visto come una palestra in cui si possono applicare vari concetti di base acquisiti nei corsi di Meccanica Razionale e Meccanica Applicata alle Macchine impartiti nell'ambito del corso di laurea di I livello in Ingegneria Meccanica attivato presso l'Universit `a di Firenze. Vista l'esiguit `a del tempo a disposizione, vengono forniti degli elementi di modellazione cinematica e dinamica dei robot industriali secondo il metodo di Denavit-Hartenberg. Successivamente vengono fornite nozioni di base sulla cinematica differenziale, la statica e la modellazione dinamica dei robot.
Riguardo alle propedeuticit ` a, non temano gli allievi informatici ed elettronici che seguono il corso e che non hanno nel proprio bagaglio molte nozioni di Meccanica, in quanto tutti gli argomenti vengono trattati in modo autocontenuto.
Nello scegliere gli argomenti del corso, la mia intenzione `e quella di far fronte a diverse esigenze, relative rispettivamente agli studenti che andranno nel mondo del lavoro dopo la laurea di primo livello, senza seguire altri corsi nel settore della Meccanica Applicata, ed a quelli che vorranno approfondire gli studi nel settore della Modellazione e Controllo dei Sistemi Meccanici, vuoi seguendo corsi di indirizzo nel terzo anno della laurea di primo livello, vuoi in un corso di laurea specialistica. La laurea di primo livello in Ingegneria Meccanica d`a infatti accesso senza debiti formativi a varie lauree specialistiche tra cui quella in Ingegneria dell'Automazione, nella quale le conoscenze acquisite nell'area della robotica possono essere messe a frutto.
Per l'allievo che dopo la laurea di primo livello si inserisca nel mondo del lavoro, i contenuti del corso potranno tornare utili nel caso in cui egli abbia a che fare con l'uso e la programmazione di robot industriali.
Per l'allievo che intenda continuare gli studi, gli argomenti trattati sono una base su cui innestare successivi concetti di meccanica dei robot nonch´e modellazione e controllo dei sistemi meccanici.
Un'ultima nota infine sulla scelta di produrre delle dispense. Esistono degli ottimi libri di robotica. Essendo per`o i contenuti del corso di Meccanica Applicata alle Macchine II molto limitati per ragioni di tempo, ho ritenuto opportuno dare agli allievi meccanici un supporto cartaceo (gratuito) su cui poter studiare, senza costringerli all'acquisto di costosi libri molto pi `u ampi rispetto agli argomenti svolti.
Per gli allievi di Robotica e Automazione Industriale di cui il corso di Meccanica Applicata alle Macchine II costituisce un primo modulo, e per l'allievo che volesse comunque dotarsi di un ottimo testo di riferimento, suggerisco il libro di “Robotica

Industriale" dei Proff. Lorenzo Sciavicco e Bruno Siciliano, edito da McGraw-Hill Italia.

Firenze, febbraio 2005

Contenuti

Parte I

Elementi di cinematica dei robot

1 Metodi per la rappresentazione dell’orientazione

Esistono vari metodi per la rappresentazione dell’orientazione relativa di due terne cartesiane (ad esempio fissate a due diversi corpi rigidi di una catena cinematica). Si suole classificare tali metodi in due categorie:

- rappresentazioni ridondanti;
- rappresentazioni minime.

Come si vedr`a in appresso, il numero minimo di parametri necessari a descrivere l’orientazione di un corpo rigido nello spazio `e pari a 3. Le rappresentazioni minime dell’orientazione fanno appunto uso di 3 parametri, mentre quelle ridondanti usano 4 o pi `u parametri. Tra i vari metodi di rappresentazione dell’orientazione ne tratteremo tre: uno ridondante ed minimi minimo. Il primo `e quello delle “matrici di rotazione,” dove si usano 9 parametri, il secondo `e quello degli “angoli di Eulero,” dove si usano 3 parametri, e infine la rappresentazione “asse-angolo” che, pur facendo uso di un vettore e di uno scalare (in tutto 4 parametri), non pu`o essere considerata una rappresentazione ridondante.

1.1 Matrice di rotazione - coseni direttori

Supponiamo di avere due terne $Ox_0y_0z_0$ e $Oxyz$, aventi origine comune in O, e di volerne descrivere l’orientazione relativa.
Siano i_0, j_0, k_0 i versori degli assi del sistema di riferimento $Ox_0y_0z_0$ e i, j, k, i versori degli assi del sistema di riferimento $Oxyz$.

Scomponendo il versore i_0 lungo le tre direzioni dei versori i, j, k si ottiene la seguente relazione:
$i_0 = i_{0x}i + i_{0y}j + i_{0z}k$. (1)
Analogamente, per i versori j_0 e k_0, si ottiene:
$j_0 = j_{0x}i + j_{0y}j + j_{0z}k$ (2)
$k_0 = k_{0x}i + k_{0y}j + k_{0z}k$. (3)
Le componenti dei versori i_0, j_0, k_0 lungo gli assi del sistema Oxyz identificano completamente l'orientazione della terna $Ox_0y_0z_0$. Tali componenti vengono usate per formare una matrice, detta "matrice di rotazione," come segue:

$$R = \begin{bmatrix} i_0 & j_0 & k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{0x} & j_{0x} & k_{0x} \\ i_{0y} & j_{0y} & k_{0y} \\ i_{0z} & j_{0z} & k_{0z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Proiettando ognuna delle tre equazioni (1), (2), (3) lungo le direzioni dei versori

i, j, k, si ottengono le nove relazioni:

$$\begin{aligned}
i_{0x} &= i_0 \bullet i = i_0^T i \\
i_{0y} &= i_0 \bullet j = i_0^T j \\
i_{0z} &= i_0 \bullet k = i_0^T k \\
j_{0x} &= j_0 \bullet i = j_0^T i \\
j_{0y} &= j_0 \bullet j = j_0^T j \quad (5) \\
j_{0z} &= j_0 \bullet k = j_0^T k \\
k_{0x} &= k_0 \bullet i = k_0^T i \\
k_{0y} &= k_0 \bullet j = k_0^T j \\
k_{0z} &= k_0 \bullet k = k_0^T k .
\end{aligned}$$

Gli elementi della matrice R si dicono "coseni direttori" in quanto ognuno di essi \`e pari al prodotto scalare di un versore della terna $Ox_0y_0z_0$ per un versore della terna Oxyz. Ricordiamo che il prodotto scalare tra due vettori \`e pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso: due versori hanno entrambi modulo unitario, quindi il loro prodotto scalare \`e pari al coseno dell'angolo compreso, donde il termine "coseni direttori".

Riepilogo *La matrice di rotazione* R *\`e formata dai nove coseni direttori tra gli assi di due sistemi di riferimento di cui si vuole descrivere l'orientazione relativa.* R *descrive completamente l'orientazione relativa delle due terne. Si tratta di una rappresentazione dell'orientazione di tipo ridondante in quanto vengono utilizzati 9 parametri invece di 3.*

1.2 Espressione di R per rotazioni attorno agli assi coordinati

Ricaviamo adesso le espressioni della matrice R nel caso in cui la terna mobile sia ruotata, rispetto alla terna fissa, di un certo angolo attorno ad uno degli assi coordinati (della terna fissa).

1.2.1 Rotazione attorno a z

Con riferimento alla figura 1, supponiamo che la terna $Ox_0y_0z_0$ abbia l'asse z_0 coincidente con l'asse z e che l'asse x_0 sia ruotato di un angolo rispetto all'asse x. Dalla coincidenza degli assi z e z_0 segue che $k_0 = k = [0\ 0\ 1]^T$. I versori i_0 e j_0 valgono invece:

$$i_0 = \begin{bmatrix} c \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$$

35
j_0 =24
−s
c
0
35
.

Figura 1: Rotazione attorno a z.
Assemblando la matrice R otteniamo:
R = R_z() = i_0 j_0 k_0 =24
c −s 0
s c 0
0 0 1
35
(6)

1.2.2 Rotazione attorno a x

Dato che x e x_0 sono coincidenti, sar`a i_0 = i = [1 0 0]^T . Per gli altri due versori, dalla Fig. 2 si ottiene:
j_0 =24
0
c
s
35
k_0 =24
0
−s
c
35
.
Assemblando la matrice R otteniamo:
R = R_x() = i_0 j_0 k_0 =24
1 0 0
0 c −s
0 s c
35
(7)

Figura 2: Rotazione attorno a x.

1.2.3 Rotazione attorno a y

Dato che y e y_0 sono coincidenti, sar`a j_0 = j = [0 1 0]^T . Per gli altri due versori, dalla Fig. 3 si ottiene:
i_0 =24
c
0
−s
35
k_0 =24
s
0
c
35

.
Figura 3: Rotazione attorno a y.
Assemblando la matrice R otteniamo:
$R = R_y() = i_0\ j_0\ k_0 = 24$
c 0 s
0 1 0
−s 0 c
35
(8)

1.3 Cambio di coordinate tra due terne con la stessa origine
Figura 4: Cambio di coordinate tra terne ad origine comune.
Supponiamo di conoscere le coordinate $[p_{0x}\ p_{0y}\ p_{0z}]^T$ di un punto P dello spazio rispetto ad un sistema di riferimento $Ox_0y_0z_0$ e di voler calcolare le coordinate $[p_x\ p_y\ p_z]^T$ dello stesso punto rispetto ad un altro sistema di riferimento Oxyz, avente la stessa origine del primo sistema di riferimento, come mostrato in Fig. 4.
Il vettore posizione O−!P puo` essere scomposto lungo 3 qualsiasi direzioni a due a due non parallele. In particolare possiamo scomporlo lungo le direzioni dei tre versori i, j, k, ma anche lungo le direzioni dei tre versori i_0, j_0, k_0, ottenendo la seguente relazione:
$p_xi + p_yj + p_xk = p_{0x}i_0 + p_{0y}j_0 + p_{0x}k_0$. (9)
Proiettando ambo i membri dell'equazione 9 lungo le tre direzioni i, j, k (tramite l'operazione di prodotto scalare), otteniamo:
$p_x = p_{0x}i_0^T i + p_{0y}j_0^T i + p_{0x}k_0^T i$
$p_y = p_{0x}i_0^T j + p_{0y}j_0^T j + p_{0x}k_0^T j$ (10)
$p_z = p_{0x}i_0^T k + p_{0y}j_0^T k + p_{0x}k_0^T k$
Non `e difficile riconoscere che le Eq. 10 possono essere anche scritte in forma matriciale come segue:
24
p_x
p_y
p_z
35
= 264
$i_0^T i\ \ j_0^T i\ \ k_0^T i$
$i_0^T j\ \ j_0^T j\ \ k_0^T j$
$i_0^T k\ \ j_0^T k\ \ k_0^T k$
375
24
p_{0x}
p_{0y}
p_{0z}
35
, (11)
o anche, grazie alla (5), in modo pi `u compatto:
$p = Rp_0$, (12)

dove $p = [p_x\ p_y\ p_z]^T$ e` il vettore posizione O−!P espresso nel sistema di riferimento Oxyz e $p_0 = [p_{0x}\ p_{0y}\ p_{0z}]^T$ e` il vettore posizione O−!P espresso nel sistema di riferimento
$Ox_0y_0z_0$.

Riepilogo *Note che siano le coordinate di un punto rispetto ad una terna* $Ox_0y_0z_0$*,*
la matrice di rotazione R *permette di calcolare, tramite un semplice prodotto matriciale,*
le coordinate dello stesso punto rispetto ad una terna Oxyz *avente la*
stessa origine della prima.

1.4 Propriet`a della matrice di rotazione

1.4.1 Ortogonalit`a di R

Dato che ogni colonna della matrice R `e formata dalle componenti di un versore
della terna $Ox_0y_0z_0$, il prodotto scalare tra due diverse colonne `e nullo:

$i_0^T j_0 = 0$

$j_0^T k_0 = 0$ (13)

$k_0^T i_0 = 0$.

Dalle condizioni (13), unite al fatto che il prodotto scalare di un vettore per s`e
stesso `e pari a 1, discende una delle propriet `a pi `u importanti ed utili delle matrici
di rotazione, ovvero la propriet `a di essere ortogonali:

$R^T R = I$. (14)

La (14) pu`o essere dimostrata come segue:

$R^T R = 264$

i_0^T

j_0^T

k_0^T

375

$i_0\ j_0\ k_0 = 264$

$i_0^T i_0\ i_0^T j_0\ i_0^T k_0$

$j_0^T i_0\ j_0^T j_0\ j_0^T k_0$

$k_0^T i_0\ k_0^T j_0\ k_0^T k_0$

375

= 24

1 0 0

0 1 0

0 0 1

35

= I (15)

1.4.2 Inversa di R

Si pu`o dimostrare che il determinante di una matrice di rotazione `e pari a 1.
Quindi la matrice R ammette sempre un'inversa R^{-1}. Moltiplicando a destra ambo
i membri della (14) per R^{-1}, si ottiene:

$R^T RR^{-1}$

| {z } I

$= IR^{-1}$, (16)

ovvero:

$R^T = R^{-1}$. (17)

L'inversa di una matrice di rotazione pu`o quindi essere semplicemente calcolata
tramite un'operazione di trasposizione.

1.4.3 Derivata temporale di una matrice di rotazione

Supponiamo di avere un corpo rigido mobile, vincolato a ruotare attorno ad un
punto 0, a cui `e fissata una terna $0x_1y_1z_1$. L'orientazione (variabile) del corpo
rispetto ad una terna fissa 0xyz che ha origine comune con $0x_1y_1z_1$ pu`o essere
rappresentata con la matrice di rotazione R. La posizione di un punto P del corpo
`e ovviamente costante rispetto alla terna solidale al corpo, mentre varia rispetto
alla terna fissa come segue:

$p_0 = Rp_1$. (18)
Nel seguito, per indicare vettori specificati rispetto alla terna fissa ometteremo l'apice 0 dove non ci sia pericolo di equivoci. Derivando rispetto al tempo ambo i membri della (18) otteniamo:
˙ p = ˙Rp_1 + Rp˙ $_1$. (19)
Ma p_1 = cost, quindi p˙ $_1$ = 0, quindi
˙ p = ˙Rp_1 . (20)
D'altro canto, vale anche:
p˙ = ! × p = ! × (Rp_1) , (21)
ed essendo il prodotto vettoriale esprimibile, con formalismo matriciale, anche mediante l'operatore antisimmetrico S(•) [1], la (21) pu`o essere riscritta:
p˙ = S(!)Rp_1 . (22)
Dovendo essere uguali i secondi membri della (20) e della (22), per ogni punto P del corpo rigido considerato, dovr `a necessariamente valere:
˙R
= S(!)R . (23)

1.5 Rotazione di un vettore

Supponiamo di avere un vettore u_0 e di premoltiplicarlo per una matrice di rotazione R, ottenendo un secondo vettore u, come segue:
u = Ru_0 . (24)

[1]Dati due vettori a = $[a_x\ a_y\ a_z]^T$ e b = $[b_x\ b_y\ b_z]^T$, il loro prodotto vettoriale c = a × b `e ottenibile calcolando formalmente il determinante:
i j k
a_x a_y a_z
b_x b_y b_z

.
Risulta quindi c = $(a_yb_z−a_zb_y)i+(a_zb_x−a_xb_z)j+(a_xb_y−a_yb_x)k$, ovvero c =24
$a_yb_z − a_zb_y$
$a_zb_x − a_xb_z$
$a_xb_y − a_yb_x$
35
.
Definendo l'operatore S(a) =24
0 $−a_z$ a_y
a_z 0 $−a_x$
$−a_y$ a_x 0 35 , `e facile dimostrare che c `e ottenibile anche calcolando il prodotto matrice-vettore S(a)b.

Come sar`a fatto il vettore u? Si pu`o dimostrare che il vettore u ha modulo pari a u_0 e risulta ruotato rispetto a u_0 in modo determinato dalla matrice R.
Ad esempio, supponiamo di avere un vettore u_0, giacente sul piano xy, come mostrato in Fig. 5. Sia u = $|u_0|$, varr `a allora:
u_0 =24
uc
us
0
35
. (25)
Il vettore u, ottenuto dal primo ruotandolo (attorno all'asse z) di un angolo , sar` a:
u =24
uc
us
0

35
=24
ucc − uss
usc + ucs
0
35
=24
c −s 0
s c 0
0 0 1
35
24
uc
us
0
35
= $R_z()u_0$.
(26)
Figura 5: Rotazione di un vettore nel piano xy

1.6 Composizione di rotazioni successive

Ci poniamo adesso il problema di calcolare la matrice di orientazione che lega tra loro due terne, ad origine comune, di cui la seconda sia ottenuta dalla prima a seguito di rotazioni successive. Specificheremo le rotazioni successive che portano la prima terna a sovrapporsi alla seconda nei due seguenti modi:
in **terna corrente o mobile:** rispetto alla terna, detta terna corrente o mobile, che via via si ottiene dalla prima a seguito delle
rotazioni a cui `e sequenzialmente sottoposta;
in **terna fissa o base:** rispetto alla prima terna, supposta fissa.

1.6.1 Composizione in terna corrente

Supponiamo di avere tre terne ad origine comune:
• $Ox_0y_0z_0$, terna base;
• $Ox_1y_1z_1$ terna ottenuta dalla 0 a seguito di una rotazione R_0
$_1$ (specificata in
terna 0);
• $Ox_2y_2z_2$ terna ottenuta dalla terna 1 a seguito di una rotazione R_1
$_2$ (specificata
in terna 1).
Sia R_0
$_2$ la matrice di rotazione (incognita) che esprime l'orientazione della terna $Ox_2y_2z_2$ rispetto alla terna base $Ox_0y_0z_0$. Siano p_0, p_1, p_2, le coordinate di un punto P dello spazio rispetto ad ognuna delle tre terne. Per quanto visto nel Par. 1.3, valgono le relazioni:
$p_0 = R_0$
$_1p_1$ (27)
$p_1 = R_1$
$_2p_2$ (28)
$p_0 = R_0$
$_2p_2$. (29)
Sostituendo l'espressione (28) di p_1 nella (27) si ottiene:
$p_0 = R_0$

$_1R^1_2 p^2$. (30)

Dovendo essere valide entrambe le equazioni (29) e (30) per ogni punto P, sarà allora:

$$R^0_2 = R^0_1 R^1_2 . \quad (31)$$

La (31) è la legge di composizione di rotazioni successive in terna corrente. Generalizzando, se abbiamo $n + 1$ terne, numerate da 0 ad n, ognuna legata alla precedente da una matrice R^{i-1}_i, la matrice di rotazione che esprime l'orientazione dell'ultima terna rispetto alla prima, assunta come terna base, è data da:

$$R^0_n = R^0_1 R^1_2 \dots R^{n-2}_{n-1} R^{n-1}_n . \quad (32)$$

1.6.2 Composizione in terna fissa

Supponiamo di avere tre terne ad origine comune:

- $Ox_0y_0z_0$, terna base;
- $Ox_1y_1z_1$ terna ottenuta dalla terna 0 a seguito di una rotazione ${}^0R^0_1$ (specificata in terna 0, indicata nell'apice sinistro);
- $Ox_2y_2z_2$ terna ottenuta dalla terna 1 a seguito di una rotazione ${}^0R^1_2$ (anch'essa specificata in terna 0).

Per ottenere la legge di composizione delle due rotazioni, sfruttiamo la conoscenza della legge di composizione in terna corrente: la rotazione complessiva può essere vista come una successione delle seguenti rotazioni, tutte specificate in terna corrente:

- rotazione $R_1 = {}^0R^0_1$ che porta la terna 0 sulla terna 1;
- rotazione $R_2 = ({}^0R^0_1)^T$ che riporta la terna 1 sulla terna 0;
- rotazione $R_3 = {}^0R^1_2$ che impone alla terna corrente la seconda rotazione;
- rotazione $R_4 = {}^0R^0_1$ che "recupera" la rotazione $R_2 = ({}^0R^0_1)^T$.

Applicando la regola di composizione in terna corrente otteniamo:

$$R^0_2 = \underbrace{R_1R_2}_{=I} R_3R_4 = R_3R_4 = {}^0R^1_2 \, {}^0R^0_1 . \quad (33)$$

In pratica, la matrice di rotazione complessiva R^0_2 si ottiene, come nel caso della composizione in terna corrente, con un prodotto matriciale delle due rotazioni successive, ma questa volta l'ordine di moltiplicazione va invertito, ovvero, generalizzando al caso di n rotazioni successive ${}^0R^{i-1}_i$, $i = 1, \ldots, n$ specificate in terna 0, la regola di composizione è la seguente:

$$
{}^0R^0_n = {}^0R^{n-1}_n \, {}^0R^{n-2}_{n-1} \cdots {}^0R^1_2 \, {}^0R^0_1 \,. \qquad (34)
$$

1.7 Un altro modo di vedere la composizione in terna fissa

Se la procedura seguita nel paragrafo 1.6.2 non risultasse molto chiara, si suggerisce qui un metodo alternativo per giugere al medesimo risultato.

L'utilizzo di tre indici i, j, k in una matrice di rotazione ${}^iR^j_k$ sta ad indicare che la matrice di rotazione ruota qualsiasi vettore così come la terna k è ruotata rispetto alla terna j. Se gli indici i e j sono uguali, nella notazione si omette quello in alto a sinistra.

Quindi, premoltiplicando per ${}^iR^j_k$ un vettore u_0, le cui componenti rispetto alla terna i siano u_{0i}, esso viene trasformato in un vettore u, le cui componenti in terna i sono u_i, come segue:

$$
u_i = {}^iR^j_k u_{0i} \,. \qquad (35)
$$

In particolare, se consideriamo i versori i_j, j_j, k_j della terna j e i versori i_k, j_k, k_k della terna k, valgono le tre seguenti relazioni:

$$
i^i_k = {}^iR^j_k \, i^i_j \qquad (36)
$$

$$
j^i_k = {}^iR^j_k \, j^i_j \qquad (37)
$$

$$
k^i_k = {}^iR^j_k \, k^i_j \,, \qquad (38)
$$

le quali possono essere scritte in forma più compatta mediante la seguente equazione matriciale:

$$
[\, i^i_k \;\; j^i_k \;\; k^i_k \,] = {}^iR^j_k \, [\, i^i_j \;\; j^i_j \;\; k^i_j \,] \,. \qquad (39)
$$

Non è difficile riconoscere ${}^iR^i_k$

nella matrice a primo membro della (39), mentre a secondo membro compare il prodotto ${}^{i}R^{j}_{k}\,{}^{i}R_{ij}$, ovvero:

$${}^{i}R_{ik} = {}^{i}R^{j}_{k}\,{}^{i}R_{ij}, \quad (40)$$

o, omettendo l'indice in alto a sinistra dove non necessario:

$$R_{ik} = {}^{i}R^{j}_{k}\,R_{ij}. \quad (41)$$

La (41) rappresenta la regola di composizione cercata. In particolare, sostituendo 0, 1, 2 agli indici i, j, k, otteniamo:

$$R^{0}_{2} = {}^{0}R^{1}_{2}\,R^{0}_{1}. \quad (42)$$

Esempio 1.1: Calcolo della relazione esistente tra una matrice di rotazione specificata in terna base e la matrice di rotazione specificata in terna corrente che esprime la stessa rotazione.

Date tre terne i, j, k, per la regola di composizione in terna corrente sappiamo che:

$$R_{ik} = R_{ij}\,R^{j}_{k}. \quad (43)$$

Eguagliando i secondi membri della (41) e della (43) si ottiene la seguente equazione:

$$R_{ij}\,R^{j}_{k} = {}^{i}R^{j}_{k}\,R_{ij}. \quad (44)$$

Premoltiplicando ambo i membri della (44) per R_{ij}^{T}, otteniamo infine:

$$R^{j}_{k} = R_{ij}^{T}\,{}^{i}R^{j}_{k}\,R_{ij}, \quad (45)$$

che esprime il legame esistente tra due matrici di rotazione, una specificata in terna fissa e l'altra in terna mobile, che esprimono la medesima rotazione.

1.8 Rotazione attorno ad un asse arbitrario

Ci si pu`o porre il problema di determinare la matrice R che esprima una rotazione di un angolo attorno ad un dato asse identificato da un versore r, come mostrato in Fig. 6. Il problema pu`o sembrare complesso, ma pu`o essere agevolmente risolto ricorrendo ad una composizione di rotazioni elementari. L'orientazione del

Figura 6: Rotazione attorno ad un asse arbitrario.

versore r rispetto alla terna Oxyz `e descritta, ad esempio, dagli angoli e mostrati in Fig. 6. La rotazione attorno all'asse arbitrario r pu`o essere composta, in logica di terna fissa, come segue:

1. una rotazione $R_z(-)$ dell'asse r attorno all'asse z che lo porti ad appartenere

al piano xz;
2. una rotazione $R_y(-)$ dell'asse r attorno all'asse y che porti il versore r ad essere allineato con l'asse z;
3. una rotazione $R_z()$ attorno all'asse z (ora coincidente con la direzione di r) dell'angolo assegnato;
4. una rotazione $R_y()$ dell'asse r attorno all'asse y;
5. una rotazione $R_z()$ dell'asse r attorno all'asse z che riporti il versore r nell'orientazione originaria.

La logica `e quella di "far diventare" il versore r parallelo ad un asse coordinato, in modo che la rotazione sia fatta attorno ad un asse coordinato (l'asse z) invece che attorno ad un asse qualsiasi. Dopo aver fatto tale rotazione, si "riporta indietro" il versore r nell'orientazione originaria. Dovendo comporre le rotazioni elementari prima descritte in terna fissa, la matrice di rotazione complessiva risulta:

$Rr() = R_z()R_y()R_z()R_y(-)R_z(-)$. (46)

1.9 La rappresentazione asse-angolo

Dato l'angolo e le componenti del versore $r = [r_x\ r_y\ r_z]$, l'espressione della (46) pu`o essere semplificata dopo avere espresso gli angoli e in funzione delle componenti di r ed aver eseguito tutti i prodotti matriciali. Il risultato `e la seguente espressione:

Rr() =24
r^2_x
$(1 - c) + c\ r_xr_y(1 - c) - r_zs\ r_xr_z(1 - c) + r_ys$
$r_xr_y(1 - c) + r_zs\ r^2$
$_y(1 - c) + c\ r_yr_z(1 - c) - r_xs$
$r_xr_z(1 - c) - r_ys\ r_yr_z(1 - c) + r_xs\ r^2$
$_z(1 - c) + c$
35
.
(47)

La (47) pu`o essere invertita, calcolando cos`ı il versore r e l'angolo che corrispondono ad una determinata matrice di rotazione R. Indicando con r_{ij} l'elemento generico della matrice R, osserviamo che:

$\mathrm{Trace}(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = (r^2_x$
$+ r^2$
$_y + r^2$
$_z)$
| {z } =1
$(1 - c) + 3c = 1 + 2c$, (48)

da cui:

c =
$r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1$
2
. (49)

La (49) pu`o essere risolta in utilizzando la funzione arco coseno:

$= \pm\cos^{-1} r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1$
2 . (50)

Al segno + corrisponde 0 (e, conseguentemente, sin 0), mentre al segno − corrisponde − 0 (sin 0). La doppia soluzione ($= \pm\cos^{-1}(\bullet)$)

corrisponde al fatto geometrico che una rotazione di attorno ad un dato asse di versore r `e del tutto equivalente ad una rotazione di − attorno al versore −r.

Sottraendo tra loro gli elementi fuori diagonale r_{ij} ed r_{ji} a secondo membro della (46), otteniamo le tre seguenti relazioni:

$r_{32} - r_{23} = 2r_x s$ (51)

$r_{13} - r_{31} = 2r_y s$ (52)

$r_{21} - r_{12} = 2r_z s$, (53)

che, risolte in r_x, r_y, r_z, danno il seguente risultato:

$$r_x = \frac{r_{32} - r_{23}}{2s} \quad (54)$$

$$r_y = \frac{r_{13} - r_{31}}{2s} \quad (55)$$

$$r_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{2s} , \quad (56)$$

ovvero:

$$r = \frac{1}{2 \sin} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} . \quad (57)$$

Esistono due casi limite, ovvero il caso in cui $\cos = 1$ e quello in cui $\cos = -1$.
Il primo caso si verificher `a quando risulter ` a:

$$\mathrm{Trace}(R) = 1 + 2c = 3 , \quad (58)$$

l'angolo `e nullo e il versore r `e indeterminato.
Se invece vale:

$$\mathrm{Trace}(R) = 1 + 2c = -1 , \quad (59)$$

vorr `a dire che vale (oppure $-$) e per calcolare correttamente r bisogner`a procedere per ispezione diretta sulla matrice $R_r()$ che, in questo caso varr ` a:

$$R_r() = \begin{bmatrix} 2r_x^2 - 1 & 2r_x r_y & 2r_x r_z \\ 2r_x r_y & 2r_y^2 - 1 & 2r_y r_z \\ 2r_x r_z & 2r_y r_z & 2r_z^2 - 1 \end{bmatrix} . \quad (60)$$

La soluzione pu`o essere cercata utilizzando una delle colonne: scegliendo la prima colonna, per fissare le idee, le due possibili soluzioni, discriminate dalla scelta del segno di r_x risulteranno:

$$r_x = \pm\sqrt{\frac{r_{11} + 1}{2}} \quad (61)$$

$r_y =$
r_{21}

$2r_x$
(62)
$r_z =$
r_{31}
$2r_x$
. (63)
Qualora r_x fosse molto piccolo, i rapporti r_{21}
$2r_x$
e r_{31}
$2r_x$
sarebbero malcondizionati e
si compirebbe un grosso errore nel calcolo di r_y e r_z, quindi in tal caso conviene utilizzare un'altra colonna.

1.10 Angoli di Eulero

Supponiamo di dover descrivere l'orientazione relativa di una terna $Ox_1y_1z_1$ (che diremo convenzionalmente terna mobile) rispetto ad una terna $Oxyz$ (che diremo convenzionalmente terna base). Il metodo degli angoli di Eulero permette di scomporre la rotazione finale in una composizione di tre rotazioni elementari (rispetto ad assi coordinati) specificate in terna corrente oppure in terna fissa. Esistono vari metodi di definire gli angoli di Eulero (almeno 12): noi esamineremo gli angoli di Eulero di tipo ZY Z. Il nome ZY Z discende dal fatto che si usano tre rotazioni elementari successive attorno agli assi Z, Y , Z della terna corrente.

Figura 7: Angoli di eulero.

Descriviamo adesso in dettaglio il metodo.

- Date le terne $Oxyz$ e $Ox_1y_1z_1$, come mostrato in Fig.7 identifichiamo la retta intersezione tra il piano xy e il piano x_1y_1: tale retta si dice "linea dei nodi."
- Eseguiamo una prima rotazione della terna $Oxyz$ di un algolo ' attorno all'asse z, fino a che l'asse y non coincida con la linea dei nodi, come mostrato in Fig.8.a, ottenendo la nuova terna corrente $Ox_0y_0z_0$ che ha l'asse y_0 lungo la linea dei nodi e l'asse z_0 coincidente con l'asse z. **L'angolo ' `e l'angolo formato dall'asse y e dalla linea dei nodi, scelto positivo se concorde con z.**
- Eseguiamo una rotazione della terna $Ox_0y_0z_0$ di un angolo attorno all'asse y_0, fino a che l'asse z_0 non coincida con l'asse z_1, come mostrato in Fig.8.b ottenendo una nuova terna corrente $Ox_{00}y_{00}z_{00}$ che ha l'asse z_{00} coincidente con l'asse z_1 e gli assi x_{00} e y_{00} nel piano x_1y_1. **L'angolo `e l'angolo formato dall'asse z e dall'asse z_1, scelto positivo se concorde con y_0.**
- Eseguiamo infine una rotazione della terna $Ox_{00}y_{00}z_{00}$ di un angolo attorno all'asse z_{00}, fino a che l'asse y_{00} non sia coincidente con l'asse y_1, come mostrato in Fig.8.c: a questo punto la terna corrente `e coincidente con la terna $Ox_1y_1z_1$ e "l'esercizio" `e completo. **L'angolo `e l'angolo formato dall'asse y_1 e dalla linea dei nodi orientata come y_0, scelto positivo se concorde con z_1.**

a) b)
c)
Figura 8: Rotazioni di Eulero: a) $R_z(')$; b) $R_{y_0}()$; c) $R_{z_1}( )$.

La matrice di rotazione complessiva R_{EUL} `e data dalla composizione delle tre rotazioni in terna corrente viste prima. In dettaglio:
$R_{EUL} = R_z(')R_{y_0}()R_{z_{00}}( ) =$
$=24$

c' −s' 0
s' c' 0
0 0 1
35
24
c 0 s
0 1 0
−s 0 c
35 24
c −s 0
s c 0
0 0 1
35
=
=24
c'c −s' c's
s'c c' s's
−s 0 c
35 24
c −s 0
s c 0
0 0 1
35
=
=24
c'cc − s's −c'cs − s'c c's
s'cc + c's −s'cs + c'c s's
−sc ss c
35
. (64)
La (64) pu`o essere invertita, ovvero, data una matrice di rotazione, `e possibile calcolare gli angoli di Eulero. Ispezionando la matrice (64), si pu`o osservare che:
• gli elementi r_{13} e r_{23} sono pari rispettivamente a c' e s' moltiplicati entrambi per s;
• gli elementi r_{31} e r_{32} sono pari rispettivamente a −c e s moltiplicati anch’essi entrambi per s;
• quadrando e sommando r_{13} e r_{23} (oppure r_{31} e r_{32}) si ottiene s^2 .

Visto quanto sopra, si pu`o procedere ipotizzando un segno per s e proseguendo in modo coerente. Ipotizzando $s > 0$, otteniamo:
' = atan2(r_{23}, r_{13})
= atan2(r_{32},−r_{31}) (65)
= atan2(qr^2_{23} + r^2_{13}, r_{33}) .
Per $s < 0$ si ottiene una seconda possibile soluzione:
' = atan2(−r_{23},−r_{13})
= atan2(−r_{32}, r_{31}) (66)
= atan2(−qr^2_{23} + r^2_{13}, r_{33}) .

Infine, se s = 0 (il che si pu`o verificare ispezionando gli elementi $r_{13}$, $r_{23}$, $r_{31}$ o $r_{32}$), sar`a c = ±1, a seconda che sia = 0 oppure = , e questo pu`o essere accertato dal segno di r_{33}. Se, ad esempio, = 0 la matrice R_{EUL} diventa:

R_{EUL} =24
c'c − s's −c's − s'c 0
s'c + c's −s's + c'c 0
0 0 1
35
=24
cos(' +) −sin(' +) 0
sin(' +) cos(' +) 0
0 0 1
35
(67).

Se invece risulta = :

R_{EUL} = 24
−c'c − s's c's − s'c 0
−s'c + c's s's + c'c 0
0 0 −1
35
= 24
−cos(' −) −sin(' −) 0
−sin(' −) cos(' −) 0
0 0 −1
35
(68).

Nel primo caso (= 0) si pu`o calcolare la somma di ' e

' + = atan2(−r_{12}, r_{22}) , (69)

mentre se = si pu`o calcolare la differenza di ' e

' − = atan2(−r_{12}, r_{22}) . (70)

In pratica, nel caso degenere s = 0, si pu`o scegliere arbitrariamente ' e poi determinare in modo da soddisfare la (69), se = 0 o la (70), se = .

2 Il metodo di Denavit-Hartenberg

In questo capitolo descriveremo il metodo di Denavit-Hartenberg (brevemente indicato come D-H nel prosieguo) che `e il pi `u diffuso per la descrizione cinematica di meccanismi a catena cinematica aperta semplice, come quelli utilizzati in un gran numero di robot industriali (robot seriali). Il metodo pu`o comunque essere utilizzato anche per meccanismi a catena chiusa ma nell'ambito del corso non tratteremo questa sua possibile applicazione.

Dato un meccanismo seriale, il metodo permette di fissare in modo sistematico delle terne di riferimento su ognuno dei membri che compongono il meccanismo (dal telaio fino all'organo terminale - pinza, mano o utensile) e di ricavare le leggi di trasformazione di coordinate che legano tra loro due terne contigue. Si fa uso delle "trasformazioni omogenee" che descriveremo nel paragrafo successivo.

2.1 Trasformazione tra terne con origini distinte

Supponiamo di avere due terne, Oxyz e $O_0x_0y_0z_0$, come mostrato in Fig. 9: i vettori posizione di un punto P dello spazio rispetto alle due terne saranno legati dalla seguente relazione:

O−!P = O−−O!$_0$ + O−−$_0$!P . (71)

Figura 9: Vettori posizione di uno stesso punto rispetto a due terne distinte.

Siano rispettivamente p e o_0 i vettori di R^3 contenenti le coordinate di P e O_0 rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$; sia invece p_0 il vettore delle coordinate di P rispetto alla terna $O_0x_0y_0z_0$. Se l'orientazione relativa della terna $O_0x_0y_0z_0$ rispetto alla terna $Oxyz$ `e descritta da una matrice di rotazione R, le componenti del vettore posizione $\overrightarrow{O_0P}$ rispetto alla terna $Oxyz$ saranno date dall'espressione:

$$\overrightarrow{O_0P} \quad Rp_0 \,. \quad (72)$$

Tenendo conto della 72, la 71 pu`o essere riscritta come segue:

$$p = o_0 + Rp_0 \,. \quad (73)$$

Cos`ı come la (12) permette di trasformare le coordinate di un punto tra terne ad origine comune, la (73) `e la legge di trasformazione delle coordinate di un punto tra terne con origini distinte.

2.2 Coordinate omogenee

La coordinate omogenee, che definiremo in questo paragrafo, ci consentiranno di riscrivere la (73) in modo pi `u compatto: le coordinate (omogenee) di un punto rispetto ad una terna $Oxyz$ saranno ottenute dalle coordinate (omogenee) di P rispetto ad un'altra terna $O_0x_0y_0z_0$ tramite un prodotto matriciale, invece che con una somma ed un prodotto matriciale.

Come sappiamo, le coordinate di un punto P dello spazio sono tre numeri reali che possiamo usare per formare un vettore $p \in R^3$, $p = [p_x\ p_y\ p_z]^T$.

L'informazione contenuta nei tre numeri p_x, p_y, p_z pu`o essere conservata anche se li moltiplichiamo per una stessa costante arbitraria $\neq 0$, purch´e si memorizzi, insieme ai tre nuovi numeri ottenuti anche la costante . Quindi, in sostituzione del vettore a tre componenti $p$, possiamo definire un vettore $\tilde{p} \in R^4$ che ha in s`e lo stesso contenuto informativo di p, come segue:

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \ \end{bmatrix} . \quad (74)$$

Non ci addentreremo oltre nella trattazione delle coordinate omogenee, facendo notare che se la costante viene scelta uguale a 1, le coordinate omogenee del punto P sono date dal vettore:

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (75)$$

Nel seguito utilizzeremo sempre $= 1$.

2.3 Trasformazioni omogenee

La legge di trasformazione di coordinate tra terne ad origini distinte (73) pu`o essere riscritta in forma compatta, utilizzando il formalismo matriciale, osservando che:

$$p = Rp_0 + o_0 \times 1 = [R\ o_0] \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$1 = [0\ 0\ 0]p_0 + 1 \times 1 = [0\ 0\ 0\ 1]\ p_0$
1 . (77)
In considerazione della definizione data per le coordinate omogenee (75) non `e difficile riconoscere che le (76),(77) possono essere riscritte in un'unica equazione come segue:
$\tilde{p} = R\ o_0$
$0\ 0\ 0\ 1\ \tilde{p}_0 = T\ \tilde{p}_0$, (78)
dove $\tilde{p}_0$ `e il vettore delle coordinate omogenee di P rispetto alla terna $O_0x_0y_0z_0$. La matrice T che compare nella (78) si dice matrice di trasformazione omogenea e si compone di 4 blocchi:
Allotta Complementi di Meccanica Applicata alle Macchine 24
blocco T_{11}: matrice di rotazione che esprime l'orientazione della terna $O_0x_0y_0z_0$ rispetto alla terna Oxyz;
blocco T_{12}: vettore posizione dell'origine O_0 della terna $O_0x_0y_0z_0$ rispetto alla terna Oxyz;
blocco T_{21}: vettore riga di 3 zeri;
blocco T_{22}: 1.
La matrice T permette di esprimere in modo compatto una qualsiasi rototraslazione che porti una terna Oxyz a sovrapporsi ad un'altra terna $O_0x_0y_0z_0$.

2.4 Inversa di una matrice di trasformazione omogenea

Essendo una matrice di rotazione R sempre invertibile, la (73) pu`o essere invertita moltiplicando ambo i membri per R^T, ottenendo:
$R^Tp = R^To_0 + R^TR\ |\{z\}$ I
p_0
$p_0 = R^Tp - R^To_0$. (79)
La (79) pu`o essere messa in forma matriciale utilizzando le coordinate omogenee, come visto in precedenza:
$\tilde{p}_0 = R^T\ -R^To_0$
$0\ 0\ 0\ 1\ \tilde{p}$. (80)
Dalla (80) deriva che l'inversa di una data matrice di trasformazione omogenea T esiste sempre e la sua espressione ` e:
$T^{-1} = R^T\ -R^To_0$
$0\ 0\ 0\ 1$, (81)
dove R `e il sottoblocco (di orientazione) $T_{11}$ della matrice data e $o_0$ `e il sottoblocco (di traslazione) T_{12}.

2.5 Composizione di rototraslazioni successive

Siano date tre terne Oxyz, $O_1x_1y_1z_1$ e $O_2x_2y_2z_2$ e siano: T^0_1 la matrice di trasformazione dalla terna 0 alla terna 1 e T^1_2 la matrice di trasformazione dalla terna 1 alla terna 2. Ci poniamo l'obbiettivo di calcolare T^0_2, note che siano T^0_1 e T^1_2. Per il generico punto P, opportunamente riferito in coordinate omogenee rispetto alle tre terne, varranno le seguenti equazioni:
$\tilde{p}_0 = T^0_1\ \tilde{p}_1$ (82)
$\tilde{p}_1 = T^1_2\ \tilde{p}_2$ (83)
$\tilde{p}_0 = T^0$

$_2\ \tilde{p}_2$. (84)

Sostituendo l'espressione di $\tilde{p}_1$ della (83) nella (82), otteniamo:

$\tilde{p}_0 = T^0$
$_1\ T^1$
$_2\ \tilde{p}_2$. (85)

Dovendo valere le (84),(85) per qualsiasi punto P, otterremo per T^0
$_2$ la seguente
espressione:

T^0
$_2 = T^0$
$_1\ T^1$
$_2$. (86)

Generalizzando la (86), la composizione di n trasformazioni omogenee successive
A^{i-1}
$_i$, $i = 1, \ldots, n$ d`a luogo ad una trasformazione complessiva T^0
$_n$ la cui
espressione ` e:

T^0
$_n = A^0{}_1$
$A^1{}_2$
$\ldots A^{n-2}$
$_{n-1}\ A^{n-1}$
$_n$. (87)

2.6 Il metodo di D-H per catena cinematica aperta semplice

Il metodo D-H per la modellazione cinematica di un meccanismo a catena aperta semplice con n gradi di libert `a si compone dei seguenti passi:

1. numerazione dei membri (link), solitamente da 0 (telaio) a n (organo terminale - pinza, palmo della mano o utensile);
2. numerazione delle coppie cinematiche (giunti), solitamente da 1 a n;
3. definizione, in accordo con certe regole che esporremo e le loro eccezioni, di $n + 1$ sistemi di riferimento cartesiani, ognuno fissato sul link corrispondente;
4. identificazione di 4 parametri per ogni giunto i, $i = 1, \ldots, n$, i quali consentono di scrivere la matrice di trasformazione omogeneaA^{i-1}
$_i$ che esprime
la rototraslazione della terna solidale al link i rispetto alla terna solidale al
link $i - 1$;
5. calcolo, in forma simbolica o numerica della matrice di trasformazione T^0
$_n$
dalla terna base $0xyz$ alla terna utensile $0_n x_n y_n z_n$.

Le regole generali per fissare la terna $O_i x_i y_i z_i$ sul link i sono le seguenti:

1. si sceglie l'asse z_i coincidente con l'asse del giunto $i + 1$ se questo `e rotoidale e parallelo alla direzione di traslazione del giunto $i + 1$ se questo `e prismatico;
2. si sceglie l'asse x_i lungo la retta di minima distanza tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i; se gli assi z_{i-1} e z_i sono incidenti, si sceglie x_i ortogonale ad entrambi, scegliendo arbitrariamente il verso ($i_i = \pm k_{i-1} \times k_i$).

Seguendo le regole prima enunciate, nella Fig. 10, relativa al caso generale in cui gli assi z_{i-1} e z_i sono sghembi, sono stati disegnati i vari assi. In particolare l'asse x_i, lungo la retta di minima distanza tra z_{i-1} e z_i. Esistono delle eccezioni alle regole di scelta delle terne solidali ai link: l'origine e l'asse x della terna 0

Figura 10: Terne e trasformazioni nel metodo D-H.

sono arbitrari inoltre la terna utensile `e arbitraria. Le scelte arbitrarie vanno, per quanto possibile, orientate in modo da ottenere una semplificazione del modello cinematico.

La trasformazione da $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ a $O_ix_iy_iz_i$ pu`o essere vista come composizione di 4 trasformazioni elementari in terna corrente come segue:

1. traslazione di una quantit `a d_i lungo l'asse z_{i-1} finch´e l'asse x_{i-1} non coincida con l'asse x_0;
2. rotazione attorno a z_0 z_{i-1} di un angolo $_i$, finch´e l'asse x_0 non coincida con l'asse x_{00};
3. traslazione di una quantit `a a_i lungo x_{00} fino a che l'origine della terna corrente non coincida con O_i;
4. rotazione di un angolo $_i$ attorno a x_{000} x_i fino a che l'asse z_{000} non coincida con l'asse z_i.

Per ogni giunto `e quindi possibile determinare i parametri d_i, $_i$, a_i, $_i$, definiti come segue:

d_i: distanza con segno tra O_i e O_0;

$_i$: angolo di cui bisogna far ruotare x_{i-1} affinch´e diventi parallelo a x_i, preso positivo se concorde con z_{i-1};

a_i: lunghezza (senza segno!) del segmento di minima distanza tra z_{i-1} e z_i;

$_i$: angolo di cui bisogna far ruotare z_{000} affinch´e diventi parallelo a z_i, preso positivo se concorde con x_i.

Le prime due trasformazioni sono una traslazione d_i e una rotazione $_i$ lungo l'asse z_{i-1}, quindi sono esprimibili con un'unica matrice come segue:

2664
c_i $-s_i$ 0 0
s_i c_i 0 0
0 0 1 d_i
0 0 0 1
3775
. (88)

Le altre due trasformazioni sono una traslazione a_i e una rotazione $_i$ lungo l'asse x_i, quindi sono esprimibili con un'unica matrice come segue:

2664
1 0 a_i
0 c_i $-s_i$ 0
0 s_i c_i 0
0 0 0 1
3775
. (89)

La matrice di trasformazione complessiva T^{i-1}_i `e data dal prodotto della (88) e della (89):

T^{i-1}_i =2664
c_i $-s_i$ 0 0
s_i c_i 0 0

$0\ 0\ 1\ d_i$
$0\ 0\ 0\ 1$
3775
2664
$1\ 0\ 0\ a_i$
$0\ c_i\ -s_i\ 0$
$0\ s_i\ c_i\ 0$
$0\ 0\ 0\ 1$
3775
=
=2664
$c_i\ -s_iC_i\ S_iS_i\ a_iC_i$
$s_i\ C_iC_i\ -C_iS_i\ a_iS_i$
$0\ s_i\ c_i\ d_i$
$0\ 0\ 0\ 1$
3775
= (90)
Nella (90) uno solo dei 4 parametri `e variabile e gli altri sono fissi. Il parametro variabile `e $_i$ se il giunto i `e rotoidale. Se invece il giunto i `e prismatico, il parametro variabile `e d_i. Per ogni matrice T_{i-1}
$_i$ potremo allora scrivere:
T_{i-1}
$_i = T_{i-1}$
$_i\ (q_i)$, (91)
dove $q_i = {}_i$ per un giunto rotoidale e $q_i = d_i$ per un giunto prismatico.

2.7 Applicazione del metodo di D-H ad un robot antropomorfo

Supponiamo di avere un robot a 3 DOF a struttura antropomorfa, come mostrato in Fig. 11. Il nome deriva dal fatto che ricorda (lontanamente!) il braccio umano. Sono presenti tre giunti rotoidali. I membri sono stati numerati da 0 a 3, mentre i giunti da 1 a 3. Il giunto 1 ha asse verticale mentre gli altri due hanno gli assi orizzontali e tali assi sono paralleli tra loro ed ortogonali all'asse del giunto 1. Il metodo `e stato applicato come segue:
• gli assi z_0, z_1, z_2 sono stati scelti coincidenti con gli assi dei giunti 1 2 3 e verso concorde con il verso positivo di rotazione degli attuatori dei giunti;
• l'asse x_0 (e quindi l'origine del sistema 0) `e stato scelto arbitrariamente; il versore dell'asse y_0 si ottiene al prodotto vettoriale $k_0 \times i_0$

• dato che gli assi z_0 e z_1 sono mutuamente ortogonali, l'asse x_1 `e scelto in modo che $i_1 = k_0 \times k_1$;
• gli assi z_1 e z_2 sono paralleli, quindi la retta di minima distanza non `e definita: si sceglie arbitrariamente x_2 passante per O_1;
• l'asse z_3 `e arbitrario: l'asse $x_3$ deve essere ortogonale all'asse $z_2$. per comodit`
a si sceglie allora x_3 lungo la direzione di approccio e z_3 parallelo a
z_2.
Compiliamo adesso la tabella dei parametri d_i, $_i$, a_i, $_i$.
1. **giunto 1**
• le origini delle terne 0 e 1 coincidono, quindi $d_1 = 0$;
• l'asse x_1 si ottiene ruotando l'asse x_0 attorno all'asse z_0 di un angolo
q_1, positivo se concorde con z_0;
• la minima distanza tra z_0 e z_1 `e zero, quindi $a_1 = 0$;
• l'asse z_1 si ottiene ruotando l'asse z_0 attorno a x_1 di 90 (positivo),

quindi $_1 = 90$.

2. **giunto 2**

- O_1 si trova gi `a sull'asse e x_2, quindi $d_2 = 0$;
- l'asse x_2 forma rispetto all'asse x_1 un angolo q_2, positivo se concorde con z_1;
- la minima distanza tra z_1 e z_2 `e pari ad a_1;
- l'asse z_2 `e parallelo all'asse z_1, quindi $_2 = 0$.

3. **giunto 3**

- la trasformazione dalla terna 2 alla terna 3 `e sostanzialmente identica a quella dalla 1 alla 2, quindi $d_3 = 0$, $_3 = q_3$ la distanza tra gli assi $z_2$ e $z_3$ `e pari ad a_3 e $_3 = 0$.

giunto	d_i	$_i$	a_i	$_i$
1	0	q_1	0	90
2	0	q_2	a_2	0
3	0	q_3	a_3	0

Tabella 1: Tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg per il robot antropomorfo di Fig.11

3
3
q_1
q_2
q_3
x_0
z_0
y_0
z_1
z_2
x_1
x_2
1
0
2
x_3
z_3
y_3
1
2
y_2
y_1
a_2
a_3

Figura 11: Robot antropomorfo.

Figura 12: Polso sferico di tipo roll-pitch-roll.

2.8 Polso sferico (roll-pitch-roll)

Il polso sferico roll-pitch-roll, mostrato in Fig. 18, `e molto utilizzato nella costruzione di robot industriali. Esso possiede tre giunti rotoidali i cui assi si intersecano in un punto W detto “centro del polso.” Esso viene utilizzato per completare la struttura cinematica di un manipolatore a 3 DOF (cilindrico, sferico o antropomorfo), consentendo di ottenere l’orientazione desiderata dell’organo terminale, una volta che la struttura di manipolazione sia stata utilizzata per ottenere la posizione desiderata dell’organo terminale, come sarà mostrato più avanti. In Fig. 13 è

Figura 13: Esempio di applicazione del metodo D-H al polso sferico roll-pitch-roll.

mostrato un esempio di applicazione del metodo D-H al polso sferico roll-pitchroll.

I pedici 4, 5, 6 sono stati utilizzati in quanto si suppone che il polso sia applicato ad una struttura di manipolazione a 3 DOF.

Gli assi z_3, z_4 e z_5 sono stati scelti concordi con i versi di rotazione dei giunti 4, 5 e 6.

Ipotizziamo che l’origine della terna 3 e la direzione dell’asse x_3 siano fissate dalla struttura di manipolazione precedente, ovvero $i_3 = \pm k_2 \times k_3$.

Dato che gli assi z_3 e z_4 si intersecano in W, scegliamo $i_4 = k_4 \times k_3$. Con questa scelta, vale $y_4 = -z_3$.

Anche gli assi z_4 e z_5 si intersecano in W, quindi scegliamo $i_5 = k_4 \times k_5$. Con questa scelta vale $y_5 = z_4$.

La terna di organo terminale è arbitraria, ma in mancanza di esigenze particolari, possiamo fissarla parallela alla terna 5 quando ${}_6 = 0$.

Passiamo adesso al calcolo delle matrici di trasformazione.

La matrice T^3_4 vale:

$$T^3_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

La matrice T^4_5 vale:

$$T^4_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Infine la matrice T^5_6, essendo composta da una rotazione elementare $R_{z_5}({}_6)$ e da una traslazione d_6 lungo z_5, vale

$$T^5_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(94)
Gli allievi calcolino per esercizio la trasformazione complessiva di polso T_3
6 ,
verificando che, per la parte di rotazione, si ottiene una matrice R_3
6 che, sostituendo
a 4, 5, 6 rispettivamente ', e , risulta essere identica alla matrice di
Eulero (64).

2.9 Robot antropomorfo con polso sferico

Supponiamo di avere un robot a 6 DOF a struttura antropomorfa, come mostrato in Fig. 14. Esso `e ottenuto dal robot antropomorfo di Fig.11 aggiungendo il poso sferico di Fig.13 I membri sono stati numerati da 0 a 6, mentre i giunti da 1 a 6. Il metodo `e stato applicato come segue:

• gli assi z_0, z_1, . . . , z_5 sono stati scelti coincidenti con gli assi dei 6 giunti e verso concorde con il verso positivo di rotazione degli attuatori dei giunti;
• l'asse x_0 (e quindi l'origine del sistema 0) `e stato scelto arbitrariamente; il versore dell'asse y_0 si ottiene al prodotto vettoriale $k_0 \times i_0$
• dato che gli assi z_0 e z_1 sono mutuamente ortogonali, l'asse x_1 `e scelto in modo che $i_1 = k_0 \times k_1$;
• gli assi z_1 e z_2 sono paralleli, quindi la retta di minima distanza non `e definita: si sceglie arbitrariamente x_2 passante per O_1;

3 3
q_1
q_2
x_0
z_0
y_0
z_1
z_2
x_1
x_2
1
0
2
z_4
z_3
1
2
y_2
y_1
a_2
z_5 z_6
y_6
x_4
x_6
x_3
x_5
q_3
q_5
q_6
d_4
q_1
q_4
d_6
4
5
6
4
5
6
$\pi/2 + q_3$

Figura 14: Robot antropomorfo con polso sferico.

• `e da notare che l'angolo $_3$, formato da x_2 e x_3, vale q_3 +
$_2$;
• gli assi z_2 e z_3 sono incidenti: l'asse x_3 deve essere ortogonale a entrambi, e viene scelto in modo che $i_3 = k_2 \times k_3$;
• gli assi z_3 e z_4 sono incidenti: l'asse x_4 viene scelto in modo che $i_4 = k_4 \times k_3$;
• gli assi z_4 e z_5 sono incidenti: l'asse x_5 viene scelto in modo che $i_4 = k_5 \times k_4$;
• l'asse x_6 deve essere ortogonale a z_5: lo si fissa in modo che quando q_5 `e nullo, x_6 sia parallelo a x_5; z_6 si sceglie coincidente con z_5.

Compiliamo adesso la tabella dei parametri d_i, $_i$, a_i, $_i$.

• **giunto 1**
– le origini delle terne 0 e 1 coincidono, quindi $d_1 = 0$;
– l'asse x_1 si ottiene ruotando l'asse x_0 attorno all'asse z_0 di un angolo q_1, positivo se concorde con z_0;
– la minima distanza tra z_0 e z_1 `e zero, quindi $a_1 = 0$;
– l'asse z_1 si ottiene ruotando l'asse z_0 attorno a x_1 di 90 (positivo), quindi $_1 = 90$;

• **giunto 2**
– O_1 si trova gi `a sull'asse e x_2, quindi $d_2 = 0$;
– l'asse x_2 forma rispetto all'asse x_1 un angolo q_2, positivo se concorde con z_1;
– la minima distanza tra z_1 e z_2 `e pari ad a_2;
– l'asse z_2 `e parallelo all'asse z_1, quindi $_2 = 0$;

• **giunto 3**
– l'origine della terna 2 e quella della terna 3 coincidono, quindi $d_3 = 0$, e $a_3 = 0$;
– l'angolo $_3$ formato da x_2 ed x_3 vale $_3 = q_3$ +
$_2$;
– l'angolo di cui bisogna ruotare z_2 attorno a x_3 affinch´e diventi parallelo a z_3 vale +90, quindi $_3 = 90$;

• **giunto 4**
– l'origine della terna 4 `e traslata positivamente lungo z_3 rispetto all'origine della terna 3, quindi $d_4 > 0$;
– l'asse z_3 `e incidente con z_4, quindi $a_4 = 0$;
– l'angolo di cui bisogna ruotare x_3 attorno a z_3 affinch´e diventi parallelo ad x_4 vale q_4, quindi $_4 = q_4$;
– l'angolo di cui ruotare z_3 attorno a x_4 affinch´e diventi parallelo a z_4 vale −90, quindi $_4 = -90$;

• **giunto 5**
– l'origine della terna 4 e quella della terna 5 concidono (centro del polso), quindi $d_5 = a_5 = 0$;
– l'angolo di cui bisogna ruotare x_4 attorno a z_4 affinch´e diventi parallelo ad x_5 vale q_5, quindi $_5 = q_5$;
– l'angolo di cui ruotare z_4 attorno a x_5 affinch´e diventi parallelo a z_5 vale +90, quindi $_5 = +90$;

• **giunto 6**
– l'origine della terna 6 `e traslata positivamente lungo z_5 rispetto a quella della terna 5, quindi $d_6 > 0$;
– z_5 e z_6 coincidono, quindi $a_6 = 0$ e $_6 = 0$;
– l'angolo di cui bisogna ruotare x_5 attorno a z_5 affinch´e diventi parallelo ad x_5 vale q_6, quindi $_6 = q_6$;

giunto	d_i	i	a_i	i
1	0	q_1	0	90
2	0	q_2	a_2	0
3	0	$q_3 + {}_2$	0	0
4	d_4	q_4	0	-90
5	0	q_5	0	90
6	d_6	q_6	0	0

Tabella 2: Tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg per il robot antropomorfo di Fig.14

3 Il problema della cinematica inversa

3.1 Cinematica diretta e cinematica inversa

Il metodo di Denavit-Hartenberg mostra come, per un robot di tipo “seriale,” il problema cinematico diretto sia sempre risolvibile, ovvero, dato un vettore di coordinate di giunto q 2 R^n, `e sempre possibile calcolare la posizione e l’orientazione dell’organo terminale o, pi `u precisamente, la posizione p dell’origine della terna utensile e l’orientazione R della terna utensile rispetto alla terna base. Queste informazioni sono entrambe contenute nella matrice di trasformazione omogenea T^0_n che risulta essere una funzione, calcolabile in forma chiusa, delle coordinate di giunto:

$$T^0_n = T^0_n(q) \ . \quad (95)$$

Nel caso in cui l’orientazione della terna utensile sia specificata in termini degli angoli di Eulero (o di un’altra rappresentazione minima dell’orientazione), possiamo definire un vettore x 2 R^6 che definisce lo “spazio operativo” del robot, come segue:

$$x = p \ , \quad (96)$$

dove = [']^T `e il vettore degli angoli di Eulero. La cinematica diretta pu`o anche essere scritta come funzione che associa ad un vettore di coordinate di giunto q un vettore x dello spazio operativo:

$$x = x(q) \ . \quad (97)$$

In realt `a non `e in generale possibile scrivere direttamente la funzione (97), ma `e richiesto il calcolo intermedio della matrice di orientazione da cui ricavare gli angoli di Eulero con le formule di inversione, come mostrato nel paragrafo 1.10. Comunque questo non comporta complicazioni di sorta.

La soluzione del problema cinematico diretto per meccanismi seriali, formulato come nella (95) oppure come nella (97), `e quindi sempre possibile ed ammette un’unica soluzione: detto in altri termini, *data una certa configurazione del meccanismo, cui `e associato un vettore di coordinate di giunto* q*, `e univocamente determinata la posizione e l’orientazione dell’organo terminale e questa `e data, ad esempio*[2]*, dalla (95) o dalla (97)*.

Il problema cinematico inverso consiste nel determinare possibili configurazioni nello spazio dei giunti che forniscano una data posizione ed orientazione dell’organo terminale. Ovviamente si tratta di un problema di fortissimo interesse pratico ma, purtroppo, la sua soluzione non `e in generale semplice, nel senso che non esistono procedure standard per cercare possibili soluzioni.

Inoltre, dato un certo meccanismo, possono esistere o meno soluzioni e, se esistono soluzioni, queste possono essere in numero finito o infinito.

[2]Oltre a quelli trattati nell'ambito del corso, esistono altri tipi di rappresentazione dell'orientazione, quindi la formulazione dello spazio operativo pu`o essere diversa rispetto a quella data in (96)

3.2 Alcuni esempi di robot planari

Se restringiamo l'indagine al caso piano, in cui la posizione e l'orientazione dell'organo terminale possono essere specificate con tre parametri (p_x, p_y,), un robot seriale 2R (con due giunti rotoidali) non pu`o contemporaneamente soddisfare le specifiche sulla posizione e l'orientazione dell'organo terminale, come si vede in Fig. 15: `e possibile raggiungere la posizione desiderata $p = [p_x\ p_y]^T$ in due modi possibili ma, una volta scelte le coordinate di giunto $_1$ e $_2$ in modo da soddisfare la specifica posizionale, l'orientazione dell'organo terminale `e fissata e quindi, in generale, non soddisfa l'orientazione desiderata.

Figura 15: Robot planare 2R.

Se invece abbiamo un robot planare 3R, come mostrato in Fig. 16, sar`a possibile non solo soddisfare la specifica posizionale ma anche quella di orientazione, e le soluzioni possibili saranno 2.

Figura 16: Robot planare 3R.

Infine, se abbiamo un robot planare 4R, come mostrato in Fig. 17, sar`a possibile soddisfare la specifica posizionale e quella di orientazione, e le soluzioni possibili saranno 1_1. Infatti, fissata la posizione e l'orientazione dell'organo terminale, e quindi anche la posizione del puntoW (centro del polso), il meccanismo composto dai membri 1, 2 e 3, insieme al segmento O−−W!, considerato come telaio, costituiscono un quadrilatero articolato che ha un grado di libert ` a.

Figura 17: Robot planare 4R.

3.3 Polso sferico (roll-pitch-roll)

Passando al caso spaziale, consideriamo robot con 6 DOF. Pieper dimostr`o che se esistono tre giunti adiacenti con assi che si intersecano in un unico punto, allora la soluzione del problema cinematico inverso esiste in forma chiusa. Un particolare tipo di struttura con tre assi di giunti adiacenti che si intersecano in un punto `e il giunto sferico di tipo roll-pitch-roll (rollio-beccheggio-rollio), mostrato schematicamente in Fig. 18 e gi `a analizzato dal punto di vista della cinematica diretta nel paragrafo 2.8. I tre assi dei giunti rotoidali si intersecano in un punto W detto "centro del polso." Aggiungendo quindi un polso sferico ad una struttura di manipolazione a 3 DOF, si ottiene un robot a 6 DOF che soddisfa la condizione di Pieper. Il polso sferico roll-pitch-roll `e quindi molto utilizzato nella costruzione

Figura 18: Polso sferico di tipo roll-pitch-roll.

di robot industriali. Esso viene utilizzato per completare la struttura cinematica di un manipolatore a 3 DOF (cilindrico, sferico o antropomorfo), consentendo di ottenere l'orientazione desiderata dell'organo terminale, una volta che la struttura di manipolazione sia stata utilizzata per ottenere la posizione desiderata dell'organo terminale, come sar`a mostrato pi `u avanti. Volendo fare un paragone con il caso planare, il polso sferico svolge nel caso spaziale la stessa funzione del giunto 3 nell'esempio planare di Fig. 16.

Osservando la parte rotazionaleR_3
$_6$ della trasformazione complessiva di polso
T_3
$_6$, si nota che, se sotituiamo a a $_4$, $_5$, $_6$ rispettivamente ', e , essa risulta essere identica alla matrice di Eulero (64). L'inversione cinematica del polso `e quindi immediata ricordando le (65), e le (66).

3.4 Inversione cinematica di robot a 6 DOF con polso sferico

Un robot a 6 DOF composto da una struttura di manipolazione a 3 DOF più un polso sferico consente di scomporre il problema dell'inversione cinematica, ovvero un sistema di equazioni algebriche non lineari di ordine 6, in due problemi più semplici di ordine 3. Questo è possibile in quanto, una volta nota la posizione e l'orientazione desiderata dell'organo terminale, la posizione del centro del polso p_W è calcolabile come segue:

$$p_W = p - d_6 k_5 \,, \quad (98)$$

e la posizione del centro del polso dipende solo dalle coordinate dei primi tre giunti del robot:

$$p_W = p_W(q_1, q_2, q_3) \,. \quad (99)$$

Quindi si può risolvere in modo agevole il problema della cinematica inversa della struttura di manipolazione, ottenendo q_1, q_2 e q_3 dalla (99). Note che siano q_1, q_2 e q_3, si può calcolare $T^0_3 = T^0_3(q_1, q_2, q_3)$.

La matrice di rotazione complessiva R^0_6 (nota) può essere scomposta come segue:

$$R^0_6 = R^0_3 R^3_6 \,, \quad (100)$$

dove R^0_3 è già stata calcolata (può essere estratta dalla $T^0_3(q_1, q_2, q_3)$), mentre $R^3_6 = R^3_6(_4, _5, _6)$ dipende dalle tre coordinate dei giunti del polso che rimangono da calcolare. Moltiplicando ambo i membri della (100) per $R^{0\,T}_3$ si ottiene:

$$R^3_6 = R^{0\,T}_3 R^0_6 \,, \quad (101)$$

Al secondo membro della (101) compaiono solo quantità note o già calcolate e quindi si possono calcolare $_4, _5, _6$.

3.4.1 Angoli di Eulero ZYZ e polso sferico

È da notare che per calcolare $q_4 = {}_4$, $q_5 = {}_5$, $q_6 = {}_6$, è possibile utilizzare le formule di inversione della matrice di rotazione di Eulero. Infatti, con riferimento alla Fig. 18, si può notare che, per come sono scelti i sistemi di riferimento, i tre angoli sono proprio gli angoli di Eulero ZYZ che portano la terna 3 (scelta come base della trasformazione di Eulero) a diventare parallela alla terna 6. Utilizziamo due terne ausiliarie 3_0 e 6_0 che sono solidali ai rispettivi link ma traslate in modo che le loro origini coincidano col centro del polso. Si noti che l'asse del giunto 4 è la linea dei nodi tra la terna 3_0 e la terna 6_0. Si ponga:

$$' = q_4 \quad (102)$$

$$= q_5 \quad (103)$$

$$= q_6 \,. \quad (104)$$

Una rotazione dell'angolo ' attorno a z_{03} porta l'asse y_{03} a coincidere con l'asse del giunto 5, ovvero con la linea dei nodi

z'_3

z'_6

θ

y'_3

linea dei nodi

y'_6

f

y

Figura 19: Angoli di Eulero e polso sferico.

Riepilogo L'inversione cinematica in un robot a 6 DOF con polso sferico si articola nei seguenti passi:

- date: la posizione p_{des} desiderata dell'origine della terna 6 e l'orientazione desiderata $R^0_{6\,des}$ della stessa terna, si calcola la posizione desiderata del centro del polso p^{des}_w;
- la posizione del centro del polso p_w è una funzione (nota) di q_1, q_2, q_3:

$$p_w = p_w(q_1, q_2, q_3) \; ; \quad (105)$$

- si impone l'eguaglianza tra p_w e p^{des}_w e poi si risolve in q_1, q_2, q_3 il sistema:

$$p_w(q_1, q_2, q_3) = p^{des}_w \; ; \quad (106)$$

- una volta calcolate q_1, q_2, q_3 (NOTA: la soluzione può essere multipla!) si calcola R^0_3, che non dipende da q_4, q_5, q_6, ma solo da q_1, q_2, q_3:

$$R^0_3 = R^0_3(q_1, q_2, q_3) \; ; \quad (107)$$

- si calcola numericamente $R^3_{6\,des} = R^{0\,T}_3 R^0_{6\,des}$;
- R^3_6 è una funzione nota di q_4, q_5, q_6, quindi si impone che $R^3_{6\,des}$ e R^3_6 siano uguali, risolvendo in q_4, q_5, q_6, il sistema:

$$R^3_6(q_4, q_5, q_6) = R^3_{6\,des} \, . \quad (108)$$

Parte II

Cinematica differenziale, statica e

dinamica dei robot

4 Cinematica differenziale

Nei capitoli precedenti `e stato prima esaminato il problema della cinematica diretta posizionale e poi l'inversione della cinematica diretta. Questo capitolo invece riguarder`a la derivazione della relazione che esiste tra le velocit `a dei giunti ed il moto dell'organo terminale (inteso come velocit `a di traslazione di un suo punto e velocit `a angolare).

Nella trattazione della cinematica diretta si fissa una terna sull'organo terminale e si ricava la relazione tra le coordinate di giunto e la matrice di trasformazione omogeneaT_0
$_n$ che lega tra loro la terna base e la terna solidale all'organo terminale, come mostrato in Eq. (95). In alternativa si pu`o cercare la relazione esistente tra le coordinate di giunto ed il vettore x che definisce la posizione dell'organo terminale nello spazio operativo, come mostrato in Eq. (96). Nello studio della *cinematica differenziale* bisogna invece cercare il legame tra le derivate temporali delle coordinate di giunto e la velocit `a della terna utensile, fissata all'organo terminale.

Esempio 4.1: Per chiarire il concetto di cinematica differenziale, facciamo riferimento al robot planare 3R mostrato in Fig. 16. Costruiamo il vettore x = [x y] che descrive posizione ed orientazione dell'organo terminale ed il vettore q = [$_1$ $_2$ $_3$] delle coordinate di giunto. x `e una funzione vettoriale f(q) che si esplicita nelle seguenti relazioni scalari:

$x = f_1(q) = a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123}$ (109)

$y = f_2(q) = a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123}$ (110)

$= f_3(q) = {}_1 + {}_2 + {}_3$ (111)

Derivando rispetto al tempo le (109), (110), (111), otteniamo:

$\dot{x} = -a_1s_1\,\dot{}_1 - a_2s_{12}(\dot{}_1 + \dot{}_2) - a_3s_{123}(\dot{}_1 + \dot{}_2 + \dot{}_3)$ (112)

$\dot{y} = a_1c_1\,\dot{}_1 + a_2c_{12}(\dot{}_1 + \dot{}_2) + a_3c_{123}(\dot{}_1 + \dot{}_2 + \dot{}_3)$ (113)

$\dot{} = \dot{}_1 + \dot{}_2 + \dot{}_3\,.$ (114)

Raccogliendo i termini in $\dot{}_1$, $\dot{}_2$, $\dot{}_3$ nelle (112), (113), (114), si ottengono le seguenti espressioni:

$\dot{x} = -(a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123})\dot{}_1 - (a_2s_{12} + a_3s_{123})\dot{}_2 - a_3s_{123}\,\dot{}_3$ (115)

$\dot{y} = (a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123})\dot{}_1 + (a_2c_{12} + a_3c_{123})\dot{}_2 + a_3c_{123}\,\dot{}_3$ (116)

$\dot{} = \dot{}_1 + \dot{}_2 + \dot{}_3\,.$ (117)

Le (115), (116), (117) sono lineari in $\dot{}_1$, $\dot{}_2$, $\dot{}_3$, quindi possono essere messe in forma matriciale come segue:

24
$\dot{x}$
$\dot{}$
$\dot{y}$
35
= 24
$-a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123}$ $-a_2s_{12} - a_3s_{123}$ $-a_3s_{123}$
$a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123}$ $a_2c_{12} + a_3c_{123}$ $+a_3c_{123}$
1 1 1 35
24
$\dot{}_1$
$\dot{}_2$
$\dot{}_3$
35
, (118)

o, pi `u sinteticamente:

$\dot{x}$
$= J_a(q)\dot{q}$, (119)

dove

$J_a(q) =$24

$-a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123}$ $-a_2s_{12} - a_3s_{123}$ $-a_3s_{123}$
$a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123}$ $a_2c_{12} + a_3c_{123}$ $+a_3c_{123}$
1 1 1 35 . (120)
`E
da notare che la matrice J_a `e la matrice jacobiana della funzione $x = f(q)$. Infatti, se $f_i$ `e
l'elemento generico di f, l'elemento generico ij di J_a vale $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$
. La matrice jacobiana J_a viene
detta jacobiano analitico.

4.1 Velocit `a della terna utensile nello spazio operativo

Analogamente a quanto visto nell'esempio 4 per un robot planare, per descrivere
la velocit `a dell'organo terminale di un robot che opera nello spazio 3D, si
puo` utilizzare la velocita` nello spazio operativo, indicandola con $\dot{x}$, definita come
segue:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{p}\ \dot{}$$

, (121)
dove p `e la posizione dell'origine della terna utensile e `e la rappresentazione
minima dell'orientazione (ad esempio con gli angoli di Eulero) utilizzata per definire
il vettore dello spazio operazionale.

4.2 Jacobiano analitico

Consideriamo la funzione cinematica diretta $x = f(q)$. L'espressione della velocit
`a nello spazio operativo pu`o essere ricavata come segue:

$$\dot{x} = \frac{\partial f(q)}{dq}\dot{q} . \quad (122)$$

La matrice jacobiana J_a, definita come

$$J_a(q) = \frac{\partial f(q)}{dq} , \quad (123)$$

si dice *jacobiano analitico* ed esprime la relazione (lineare!) tra la velocit `a nello
spazio operativo e quella nello spazio dei giunti.

NOTA: lo jacobiamo analitico esprime un legame lineare tra $\dot{x}$ e $\dot{q}$, ma e` una funzione fortemente non lineare di q!

Possiamo quindi scrivere:

$$\dot{x} = J_a(q)\dot{q} \quad (124)$$

ed anche:

$$\dot{p} = J_{ap}(q)\dot{q} \quad (125)$$

$$\dot{} = J_{ao}(q)\dot{q} , \quad (126)$$

dove J_{ap} e J_{ao} sono le due sottomatrici ($\in R^{3\times n}$) responsabili rispettivamente del
cambiamento di posizione e del cambiamento di orientazione.

4.3 Velocit `a della terna utensile - screw di velocit`a

La velocit `a della terna utensile, oltre che come visto nel Par. 4.1, pu`o essere
descritta in vari modi. Uno dei pi `u comuni `e quello di definire un vettore $v \in R^6$
come segue:

$$v = \dot{p}$$

ω , (127)

dove $\dot p = \frac{dp}{dt}$ è la velocità di traslazione dell'origine della terna utensile rispetto alla terna base, mentre ω è la velocità angolare della terna utensile, anch'essa relativamente alla terna base.

4.4 Jacobiano geometrico

Anche la relazione tra v e $\dot q$ è lineare e la matrice che lega tra loro i due vettori è detta, per analogia, jacobiano geometrico o, brevemente, jacobiano. Per un robot a n DOF si ha:

$$v = \begin{bmatrix} \dot p \\ \omega \end{bmatrix} = J\dot q , \quad (128)$$

dove $J \in \mathbb{R}^{6\times n}$ è appunto lo jacobiano geometrico. Lo jacobiano geometrico può essere suddiviso in due sottomatrici $J_p \in \mathbb{R}^{3\times n}$ e $J_o \in \mathbb{R}^{3\times n}$ come segue:

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix} , \quad (129)$$

dove il pedice p sta per posizione e o per orientazione. Valgono le relazioni

$$\dot p = J_p \dot q \quad (130)$$

$$\omega = J_o \dot q . \quad (131)$$

NOTA: la sottomatrice J_p dello jacobiano, relativa alla velocità di traslazione, coincide con la corrispondente sottomatrice J_{ap} dello jacobiamo analitico

4.5 Calcolo dello jacobiano geometrico

Il calcolo dello jacobiano geometrico si effettua considerando il contributo della velocità di ogni singolo giunto al moto dell'organo terminale, considerando tutti gli altri giunti bloccati, e sommando insieme tutti i contributi. L'allievo interessato ad approfondire il problema del calcolo del moto risultante dalla composizione del moto relativo dei vari membri in un cinematismo seriale, è invitato a leggere l'appendice A. Ognuno dei contributi dei giunti al moto dell'organo terminale avrà un'espressione del tipo $J_i \dot q_i$, dove J_i è la colonna i-esima dello jacobiano. La velocità complessiva dell'organo terminale sarà quindi data da:

$$v = \sum_{i=1}^{n} J_i \dot q_i . \quad (132)$$

Per calcolare le colonne dello jacobiano, calcoliamo adesso i vari contributi $J_i \dot q_i$, distinguendo il caso in cui il giunto q_i è rotoidale dal caso in cui il giunto è prismatico.

4.5.1 Calcolo dello jacobiano: giunto rotoidale

Supponiamo che il giunto i-esimo sia rotoidale. Una rotazione del giunto con velocità angolare $\dot q_i$, con tutti gli altri giunti bloccati, causerà una rotazione rigida della parte del robot che sta a valle del giunto i attorno all'asse z_{i-1}, con velocità angolare espressa (in modulo direzione e verso) dal vettore: $\dot q_i k_{i-1}$, dove k_{i-1} è il versore del giunto i.

Tale moto di rotazione attorno all'asse z_{i-1} si traduce in:

- una velocità angolare dell'organo terminale pari proprio a $\dot q_i k_{i-1}$;
- una velocità di traslazione del punto p pari a $\dot q_i k_{i-1} \times (p - o_{i-1})$, dove o_{i-1} è il vettore posizione dell'origine della terna solidale al link $i - 1$.

La colonna J_i dello jacobiano relativa al giunto i ha quindi un'espressione:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{pi} \\ J_{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i-1} \times (p - o_{i-1}) \\ k_{i-1} \end{bmatrix} \quad (133)$$

4.5.2 Calcolo dello jacobiano: giunto prismatico

Supponiamo che il giunto i-esimo sia prismatico. Una traslazione del giunto con velocita` $\dot{q}_i$, con tutti gli altri giunti bloccati, causer`a una traslazione rigida della parte del robot che sta a valle del giunto i lungo la direzione dell'asse z_{i-1}, con velocita` angolare espressa (in modulo direzione e verso) dal vettore: $\dot{q}_i k_{i-1}$, dove $k_{i-1}$ `e il versore del giunto i.
Tale moto di traslazione parallelo all'asse z_{i-1} si traduce in:

- un contributo nullo alla velocit `a angolare dell'organo terminale;
- un contributo alla velocita` di traslazione del punto p pari a $\dot{q}_i k_{i-1}$.

La colonna J_i dello jacobiano relativa al giunto i ha quindi un'espressione:

$J_i = J_{pi}$
$J_{oi} = k_{i-1}$
0 (134)

4.6 Relazione tra J e J_a

Da quanto visto nei paragrafi 4.4 e 4.2, dovrebbe essere chiaro che J_a 6= J. Pi `u precisamente le parti traslazionali dei due jacobiani coincidono:
$J_{ap} = J_p$, (135)
mentre le parti rotazionali dei due jacobiani differiscono:
J_{ao} 6= J_o . (136)
Inoltre J_{ao} dipende dal particolare tipo di rappresentazione dell'orientazione utilizzato. Cerchiamo adesso il legame esistente tra J_{ao} e J_o nel caso in cui la rappresentazione dell'orientazione utilizzata sia quella di Eulero ZY Z. Per farlo dobbiamo determinare il legame tra la velocit `a angolare di un corpo rigido e le derivate temporali degli angoli di Eulero che ne descrivono l'orientazione.

4.6.1 Velocit `a angolare e angoli di Eulero

Supponiamo di avere una terna $O_1x_1y_1z_1$ solidale ad corpo rigido mobile (l'organo terminale), la cui orientazione rispetto ad una terna Oxyz, parallela alla terna base $O_0x_0y_0z_0$, sia descritta da una terna di angoli di Eulero , , , come mostrato in Fig.7. Essendo le rotazioni di Eulero specificate in terna corrente, cio `e come rotazioni relative di una terna rispetto alla precedente, la velocit `a angolare dell'ultima terna rispetto alla prima sar`a la somma delle velocit `a angolari relative di ogni terna rispetto alla precedente, come indicato nella (202). La velocit `a angolare ! del corpo rispetto alla terna base vale (vedi Fig. 20) sar`a paria a:

y
y'
z=z'
z''=z1
x
linea dei nodi
x'
.
ϕ ***k***
.
ψ ***k****1* .
θ ***j'***
θ
ϕ
.ψ
cθ
.ψ
sθ***s***ϕ

.ψ
*s*θ*c*φ
.
–θ*s*φ
. θ
c
φ
Figura 20: Velocit `a angolare e angoli di Eulero.
! = ˙ k + ˙ j_0 + ˙ k_1 =
= 24
0
0
1
35
˙
+ 24
−s
c
0
35
˙ + 24
sc
ss
c
35
˙
. (137)
Definendo la matrice T():
T() = 24
0 −s sc
0 c ss
1 0 c
35
, (138)
Allotta Complementi di Meccanica Applicata alle Macchine 46
la (137) pu`o essere riscritta in forma matriciale:
! = T() ˙ . (139)
Se det (T()) 6= 0, la (139) pu`o essere invertita:
˙
= T()$^{-1}$! = . (140)
La matrice T() `e singolare se s = 0 per cui, in tale configurazione, non esiste
un singolo vettore ˙ di derivate degli angoli di Eulero che corrisponde ad una
data velocit `a angolare !.
4.6.2 Calcolo di J a partire da J_a
Sostituendo a primo membro della (139) J_oq˙ al posto di ! e a secondo membro
J_{ao} ˙ q al posto di ˙, otteniamo:
J_oq˙ = T()J_{ao}q˙ . (141)
La (141) deve essere valida 8q˙ , quindi avremo che:
J_o = T()J_{ao} . (142)
In considerazione della (141), ed essendo J_p = J_{ap} = $I_3$$J_{ap}$ + $0_3$$J_{ao}$, dove I_3 `e
una matrice identica 3 × 3, e 0_3 `e una matrice di zeri 3 × 3, possiamo scrivere la

seguente relazione:

Jp
Jo = I3 03
03 T()
| Ta{(Z) }
Jap
Jao , (143)

dove `e stata definita la matrice Ta() 2 R6.

4.7 Singolarit`a

Le singolarit `a sono configurazioni in cui lo jacobiano geometrico perde rango. Ad esempio, se abbiamo un manipolatore a 6 DOF, il suo jacobiano geometrico $J \in R^{6\times 6}$ `e una matrice quadrata con determinante generalmente non nullo e quindi di rango 6, tranne che in un certi punti dello spazio di configurazione. In tali punti $\det(J) = 0$ e quindi rankJ 5, cio `e si ha una perdita di rango maggiore o uguale a 1. Tali punti dello spazio di configurazione di dicono *punti singolari* o, pi `u brevemente, *singolarit `a*.

In corrispondenza delle singolarit `a si verificano le seguenti circostanze di notevole interesse, perch´e potenzialmente pericolose:

• il manipolatore perde mobilit `a in certe direzioni o, pi `u precisamente, perde la capacit`a di far eseguire all'organo terminale alcuni screw di velocit ` a;

• possono esistere infinite soluzioni al problema cinematico inverso;

• in vicinanza delle singolarit ` a, per far eseguire all'organo terminale determinati screw di velocit `a finiti, in giunti del manipolatore devono muoversi con velocit `a molto grosse.

Lo studio delle singolarit `a consiste nel cercare tutte le possibili configurazioni singolari di un dato manipolatore. Tale studio non `e in generale facile e l'identificazione di tutte le singolarit `a di una data struttura di manipolatore non sempre `e nota in forma chiusa. Ci`o che invece `e sempre possibile fare `e un calcolo in linea della *manipolabilit `a*:

m = pdet(JJT) . (144)

Che d`a una misura quantitativa che, con le dovute cautele, pu`o essere assunta come "distanza" dalle singolarit ` a: se infatti J perde rango, allora $\det(JJ^T)$ si annulla e quindi anche la manipolabilit `a m.

4.8 Disaccoppiamento singolarit`a

Esiste una classe di manipolatori a 6 DOF che semplifica il problema dello studio delle singolarit ` a: la presenza di un polso sferico, cos`ı come semplificava il problema della ricerca delle soluzioni nel problema dell'inversione cinematica (vedi paragrafo 3.4), scomponendolo in due problemi pi `u semplici, rende lo studio delle singolarit `a quasi banale, distinguendo le singolarit `a dovute alla struttura portante da quelle dovute al polso sferico.

Per affrontare lo studio delle singolarit `a di un (qualsiasi) manipolatore con polso sferico e struttura portante che pu`o essere, ad esempio, antropomorfo, sferico, cilindrico oppure prismatico) scegliamo di piazzare l'origine della terna utensile (che ricordiamo `e arbitraria) nel centro del polso W, ovvero

P W (145)

p pw. (146)

Detto in altri termini, scegliamo come polo di velocit `a per lo screw di velocit `a dell'utensile il centro del polso. Cos`i facendo, la posizione e, quindi, anche la velocit `a di P dipende esclusivamente dalle prime 3 coordinate di giunto q_1, q_2, q_3 e non dalle seconde tre q_4, q_5, q_6. In termini di jacobiano geometrico questo vuol

dire che, partizionando J in 4 blocchi di dimensione 3×3 come segue,
$J = J_{11}\, J_{12}$
$J_{21}\, J_{22}$, (147)
risulter `a $J_{12} = 0_{3\times3}$. Una matrice partizionata come in (147) in cui almeno uno dei blocchi fuori diagonale (J_{12} e J_{21}) ha determinante nullo ha come determinante il prodotto dei determinanti dei due blocchi diagonali, ovvero:
$\det(J) = \det(J_{11}) \det J_{22}$ (148)
che si annulla se almeno uno tra $\det(J_{11})$ e $\det(J_{22})$ `e nullo. Si possono quindi studiare le singolarit `a del manipolatore distinguendole tra:
- **singolarit`a di struttura:** zeri di $\det(J_{11})$;

- **singolarit`a di polso:** zeri di $\det(J_{22})$.

Le singolarit `a di struttura saranno, ovviamente, diverse per i vari tipi di struttura portante, mentre lo studio delle singolarit `a del polso sferico “roll-pitch-roll” `e valido per tutti i manipolatori con tale tipo di polso.

4.8.1 Singolarit`a di struttura del manipolatore antropomorfo

La ricerca delle singolarit `a di struttura del manipolatore antropomorfo pu`o essere fatta per via algebrica, cercando le configurazioni che annullano $\det(J_{11})$. Calcoliamo quindi J_{11}:
$J_{11} = k_0 \times (p - p_0)\; k_1 \times (p - p_1)\; k_2 \times (p - p_2)$, (149)
dove:
$k_0 =24$
0
0
1
35
; $k_1 = k_2 =24$
s_1
$-c_1$
0
35
$p_0 = p_1 =24$
0
0
0
35
; $p_2 =24$
$a_2c_1c_2$
$a_2s_1c_2$
a_2s_2
35
; $p =24$
$c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$(a_2s_2 + a_3s_{23})]$
35
Eseguiamo i vari prodotti vettoriali che compaiono nella (149).
$k_0 \times (p - p_0) = S(k_0)p =$
$=24$
$0\ -1\ 0$
$1\ 0\ 0$
$0\ 0\ 0$

35
24
$c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$(a_2s_2 + a_3s_{23})$
35
=
=24
$-s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
0
35
. (150)
$k_1 \times (p - p_1) = S(k_1)p =$
=24
$0\ 0\ -c_1$
$0\ 0\ -s_1$
$c_1\ s_1\ 0$
35
24
$c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$
$(a_2s_2 + a_3s_{23})$
35
=
=24
$-c_1(a_2s_2 + a_3s_{23})$
$-s_1(a_2s_2 + a_3s_{23})$
$(c_{21}$
$+\ s_{21}$
$)(a_2c_2 + a_3c_{23})$
35
=
=24
$-c_1(a_2s_2 + a_3s_{23})$
$-s_1(a_2s_2 + a_3s_{23})$
$(a_2c_2 + a_3c_{23})$
35
. (151)

$k_2 \times (p - p_2) = S(k_2)(p - p_2) =$
=24
$0\ 0\ -c_1$
$0\ 0\ -s_1$
$c_1\ s_1\ 0$
35
24
$a_3c_1c_{23}$
$a_3s_1c_{23}$
a_3s_{23}
35
=

$$= \begin{bmatrix} -a_3 c_1 s_{23} \\ -a_3 s_1 s_{23} \\ (c_1^2 + s_1^2) a_3 c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 c_1 s_{23} \\ -a_3 s_1 s_{23} \\ a_3 c_{23} \end{bmatrix}. \quad (152)$$

Lo jacobiano vale quindi:

$$J = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & a_3 c_{23} \end{bmatrix}. \quad (153)$$

Sviluppando $\det(J)$ secondo la prima colonna abbiamo:

$$\det(J) = -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \begin{vmatrix} -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & a_3 c_{23} \end{vmatrix} - c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \begin{vmatrix} -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & a_3 c_{23} \end{vmatrix}, \quad (154)$$

da cui si vede che il termine $(a_2 c_2 + a_3 c_{23})$ può essere messo in evidenza nei due addendi a secondo membro della (154). Risulta allora:

$$\begin{aligned} \det(J) &= (a_2 c_2 + a_3 c_{23})\left[-s_1^2(-a_2 a_3 s_2 c_{23} - a_3^2 s_{23} c_{23} + a_2 a_3 c_2 s_{23} + a_3^2 s_{23} c_{23}) - c_1^2(-a_2 a_3 s_2 c_{23} - a_3^2 s_{23} c_{23} + a_2 a_3 c_2 s_{23} + a_3^2 s_{23} c_{23})\right] = \\ &= (a_2 c_2 + a_3 c_{23})\left[-s_1^2(-a_2 a_3 s_2 c_{23} + a_2 a_3 c_2 s_{23}) - c_1^2(-a_2 a_3 s_2 c_{23} + a_2 a_3 c_2 s_{23})\right] = \\ &= -a_2 a_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \underbrace{(c_{23} s_2 - s_{23} c_2)}_{\sin((q_2+q_3)-q_2)} = \\ &= -a_2 a_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) s_3. \quad (155) \end{aligned}$$

Dalla (155) risulta che $\det(J)$ si annulla nei due casi sotto descritti.

- $a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$

  Il centro del polso P si trova sull'asse del giunto 1, ovvero sull'asse z_0, come mostrato in Fig. 21: tale situazione si dice singolarità **di spalla**. Il manipolatore perde mobilità nella direzione z_1.

- $s_3 = 0$

  In questo caso, denominato singolarità **di gomito**, il link 2 ed il link 3 sono allineati: il gomito `e completamente steso ($q_3 = 0$) come mostrato in Fig. 22, oppure completamente piegato ($q_3 = \pm$). Il manipolatore perde mobilit `a nella direzione x_2.

3
3
q_1
q_2
q_3
x_0
z_0
y_0
z_1
z_2
x_1
x_2
1
0
2
x_3
y_3
z_3
1
2
y_2
y_1
a_2
a_3
P

Figura 21: Singolarit `a “di spalla” del manipolatore antropomorfo: il centro del polso si trova sull’asse del giunto 1, ovvero sull’asse z_0.

3
3
q_1
q_2
$q\ _3=0$
x_0
z_0
y_0
x
y
2
2
z_1
z_2
x_1
1
0
2
x_3
y_3
z_3
1
2
y_1
a_2
a_3
P

Figura 22: Singolarit `a “di gomito” del manipolatore antropomorfo: in figura `e mostrato il caso $q_3 = 0$, ovvero gomito completamente steso. Un’altra singolarit `a di gomito si verifica quando $q_3 = \pm$, ovvero quando il gomito `e completamente piegato

4.8.2 Singolarit`a di polso

Le singolarit `a del polso sferico possono essere cercate per via algebrica esaminando la struttura del blocco $J_{22}$ che appare nella (147). $J_{22}$ `e costituito dalle ultime tre colonne di J_o. Come visto nel Par. 4.5.1, se il giunto i `e rotoidale, la colonna i-esima di $J_o$ `e k_{i-1}. Quindi J_{22} vale:

$J_{22} = k_3\ k_4\ k_5$. (156)

Il versore k_3 `e sempre ortogonale al versore $k_4$ e $k_4$ `e sempre ortogonale a k_5, quindi J_{22} ha rango almeno 2. Ma k_3 e k_5 possono diventare uguali o opposti a seconda della posizione del giunto 5: in quel caso avremo due colonne non indipendenti e il determinante di J_{22}. Precisamente per $_5 = 0$ avremo $k_3 = k_5$, mentre per $_5 = \pm$ avremo $k_3 = -k_5$.

Con ragionamento geometrico si giunge alla stessa conclusione osservando che, se i giunti 4 e 6 sono allineati, il polso perde mobilit `a rotazionale intorno all'asse identificato dal versore $k_3 \times k_4$.

Inoltre, ricordando che il polso sferico "incarna" gli angoli di Eulero ZY Z (vedi Par. 3.4.1), si poteva giungere allo stesso risultato osservando che per $s = 0$ la matrice T() definita nella (138) diviene:

T() =24
0 −s 0
0 c 0
1 0 ±1
35
, (157)

dove il segno + dell'elemento 33 vale per = 0 e il − per = ±. Dall'osservazione della (157), si deduce che la velocit `a angolare risultante da una qualsiasi combinazione di ˙ , ˙ , ˙ non pu`o mai avere una componente lungo la direzione individuata da $[c\ s\ 0]^T$. Quindi non `e possibile imporre all'organo terminale una velocit `a angolare arbitraria nella configurazione singolare, caratterizzata da $_5 = k$ k = 0,±1,±2, ...

5 Statica

In questo capitolo ci proponiamo di trovare la relazione esistente tra un wrench di forza applicato dall'organo terminale sull'ambiente esterno e le coppie (forze) che gli attuatori devono esercitare sui giunti per equilibrare . non equilibra quindi eventuali azioni dinamiche e nemmeno azioni gravitazionali (peso dei link).

Per trovare la relazione utilizzeremo il principio dei lavori virtuali. Il principio dei lavori virtuali afferma che, in un sistema meccanico in equilibrio, il lavoro fatto dal sistema (equilibrato) di forze e coppie interne ed esterne applicate al meccanismo stesso, in conseguenza di un qualsiasi *spostamento virtuale* del meccanismo `e nullo, ovvero:

W = 0 . (158)

Uno spostamento virtuale `e un piccolo cambiamento di configurazione q compatibile con i vincoli esistenti. Il simbolo q `e usato in vece di dq appunto a sottolineare che uno spostamento elementare dq del sistema meccanico nello spazio di configurazione non sempre `e compatibile con i vincoli esistenti. In particolare nei sistemi con vincoli *anolonomi*, le varie componenti di uno spostamento virtuale non sono indipendenti tra loro.

Nel caso di un robot con base fissa (telaio solidale ad un sistema inerziale), non esistono vincoli anolonomi e tutte le componenti di uno spostamento virtuale sono indipendenti: in pratica un qualsiasi spostamento elementare arbitrario dq `e anche uno spostamento virtuale q.

Le forze che compiono lavoro in consenguenza di uno spostamento virtuale

del robot q = dq sono:
• le azioni degli attuatori sui giunti, i quali subiscono uno spostamento dq
• il wrench di forza pari a − applicato sull'organo terminale3, il quale subisce
uno spostamento [p˙ T !T]T dt.
Risulta quindi:
W = W − W =
= T dq − T p˙
! dt = 0 , (159)
da cui:
T dq = T p˙
! dt . (160)
Sostituendo a secondo membro della (160) Jq˙ dt = Jdq al posto di p˙
! dt,
otteniamo
T dq = T Jq˙ dt =
= T Jdq . (161)
3Se `e l'azione *del manipolatore sull'ambiente* (ad es. per sollevare e spostare un oggetto oppure per applicare una forza ad una superficie) allora, per il principio di azione e reazione, − `e l'azione *dell'ambiente sul manipolatore*

La (161) deve valere 8dq, quindi deve essere verificata la relazione:
T = T J , (162)
ovvero
= JT . (163)
La (163) `e una relazione molto utile ed importante. Essa esprime la dualit `a tra la statica e la cinematica dei meccanismi e lo jacobiano `e il cardine di tale dualit ` a.

6 Dinamica dei robot

In questo capitolo studieremo una tecnica che giunge alla scrittura delle equazioni del moto di un robot manipolatore a catena aperta semplice facendo uso delle equazioni di Lagrange. Scrivere le equazioni del moto (o equazioni della dinamica inversa) vuol dire esprimere le azioni degli attuatori che fanno muovere il meccanismo in funzione di:
q coordinate lagrangiane;
q˙ derivate prime rispetto al tempo delle coordinate lagrangiane;
¨q derivate seconde rispetto al tempo delle coordinate lagrangiane;
 eventuali azioni che il meccanismo esercita sull'ambiente esterno (ad esempio spostare un peso con l'organo terminale).
In breve, scrivere le equazioni del moto di un meccanismo vuol dire esplicitare la funzione di dinamica inversa:
= (q, q˙ , q¨,) , (164)
dove `e il vettore delle azioni (forze o coppie) che gli attuatori esercitano sui giunti.
Gli obbiettivi dello studio della dinamica dei robot (e dei meccanismi in genere) sono molteplici, ne elenchiamo alcuni qui di seguito.
• **Guida alla progettazione meccanica**
L'analisi del modello dinamico di un robot pu`o fornire utili indicazioni al progettista meccanico che pu` o, nei limiti del possibile, orientare la distribuzione delle masse in modo da ridurre effetti dinamici indesiderati;
• **Dimensionamento degli attuatori**
A partire da un certo progetto meccanico del robot, ed ipotizzate certe modalit`a di esercizio, a cui corrispondono date traiettorie desiderate nello

spazio dei giunti [4] $q_d(t)$, verificare che le prestazioni degli attuatori scelti (in termini di coppie o forze e potenze erogabili) siano sufficienti.

- **Progetto degli algoritmi di controllo**

Le leggi con cui il sistema di controllo governa il sistema, richiedendo le coppie o forze agli attuatori, devono essere progettate sulla base della conoscenza del modello dinamico del sistema da controllare.

- **Simulazione dinamica**

Il modello dinamico (164) pu`o essere facilmente invertito, ricavando l'espressione delle accelerazioni ai giunti $\ddot{q}$ in funzione delle altre variabili:

$$\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q}\ , \ , \ ) \ . \quad (165)$$

[4]Intendiamo qui per traiettoria l'associazione di un *percorso* nello spazio giunti e di una *legge oraria* che descrive il modo in cui il percorso va eseguito nel tempo

La (165) pu`o poi essere integrata nel tempo per eseguire delle simulazioni dinamiche. Le simulazioni dinamiche possono essere utilizzare per fare delle verifiche sulle scelte progettuali fatte su meccanica, attuatori e algoritmi di controllo.

6.1 Richiami sulle equazioni di Lagrange

La configurazione di un meccanismo costituito da corpi rigidi collegati da coppie cinematiche dipende da un insieme di n parametri variabili che diciamo coordinate lagrangiane. La scelta delle coordinate lagrangiane non `e unica ma, per i robot a catena aperta che noi studiamo `e ovvio scegliere come coordinate lagrangiane gli elementi del vettore q delle coordinate dei giunti: si tratta quindi di rotazioni ($_i$) o traslazioni (d_i).

Tra le coordinate lagrangiane di un robot con base fissa che si muove liberamente nello spazio non esistono vincoli nemmeno a livello differenziale (cio `e tra le derivate temporali delle $q_i$). I robot manipolatori a base fissa sono quindi sistemi meccanici con vincoli "olonomi." Per tale classe di sistemi `e possibile scrivere le equazioni di Lagrange nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (166)$$

dove $L = T - V$ `e la funzione lagrangiana, ovvero la differenza tra l'energia cinetica del meccanismo $T$ e l'energia potenziale $V$, $q_i$ `e la i-esima coordinata lagrangiana e Q_i `e la componente lagrangiana delle forze attive non conservative (attive vuol dire che compiono lavoro) lungo la direzione della coordinata lagrangiana q_i.

Per chiarire, con riferimento al caso di un robot in moto libero, la generica componente lagrangiana i-esima delle forze attive vale quanto segue:

- se il giunto i `e un giunto rotoidale, $Q_i$ `e pari alla coppia totale $_i$ che gli attuatori esercitano sul giunto;
- se il giunto i `e un giunto prismatico, $Q_i$ `e pari alla forza totale $_i$ che gli attuatori esercitano sul giunto.

Se invece il robot esercita sull'ambiente un wrench di forza tramite l'organo terminale, allora a secondo membro della (166) sar`a presente anche la proiezione di $-$ lungo q_i, ovvero:

$$Q_i = {}_i - J_i^T \ , \quad (167)$$

dove J_T
$_i$ `e la i-esima riga dello jacobiano geometrico trasposto (ovvero la trasposta della i-esima colonna dello jacobiano geometrico).
Le n equazioni (166) sono le equazioni del moto del manipolatore.

6.2 Applicazione ad un pendolo (. . . ovvero ad un robot a 1 DOF)

Applichiamo il metodo delle equazioni di Lagrange ad un pendolo, mobile nel piano verticale, azionato da un motoriduttore con rapporto di riduzione $1/N$ e

momento di inerzia ridotto all'asse del rotore pari a I_m, come mostrato in Fig.23.
Il pendolo possiede un momento d'inerzia (baricentrico) attorno all'asse z_0 pari a I_{zz}, e una massa m. Dobbiamo adesso calcolare l'energia cinetica e l'energia

z
x
y
z'
C
l
x1
z1
g
O
Im
Il
θ
1/N
x'
y'

Figura 23: Pendolo motorizzato in gravit ` a.

potenziale del sistema.

6.2.1 Energia cinetica

L'energia cinetica sar`a pari a:
$T = T_m + T_l$, (168)
dove T_m `e l'energia cinetica del motoriduttore e $T_l$ `e l'energia cinetica del pendolo.
Il motore ruota attorno al proprio asse senza traslare, quindi la sua energia cinetica vale:
$T_m =$
1
2
I_m ˙ $_{2m}$
, (169)
dove ˙$_m$ = N˙ e` la velocita` angolare del motore e ˙ e` la derivata rispetto al tempo della coordinata lagrangiana del pendolo.
Il moto del pendolo `e una pura rotazione attorno all'asse z ma, per rendere pi `u generale la trattazione dell'esempio, pu`o essere interpretato anche come moto di traslazione del centro di massa C a cui si somma una rotazione attorno al centro di massa. La sua energia cinetica vale quindi:
$T_l =$
1

$$\frac{1}{2} m \dot{p}_C^T \dot{p}_C + \frac{1}{2} \omega^T I_l \omega \,, \quad (170)$$

dove $\dot{p}_C$ è la velocità del centro di massa, ω è la velocità angolare del pendolo e

$$I_l = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

è una matrice di inerzia. I_l è il tensore di inerzia del pendolo rispetto alla terna baricentrica $Cx_0y_0z_0$ parallela alla terna base $Oxyz$. Tutti gli elementi del tensore d'inerzia, tranne I_{zz}, sono variabili e dipendono dall'orientazione del pendolo, ma vedremo che la condizione di vincolo fa sì che solo I_{zz} sia rilevante ai fini del calcolo dell'energia cinetica.

Passiamo adesso ad esplicitare i vari termini che appaiono nella (170). La posizione del centro di massa vale:

$$p_C = [l \cos\theta \;\; l \sin\theta \;\; p_{Cz}]^T \,, \quad (171)$$

dove P_{Cz} è costante. Derivando rispetto al tempo la (171) si ottiene la velocità del centro di massa:

$$\dot{p}_C = [-l s \dot{\theta} \;\; l c \dot{\theta} \;\; 0]^T \,. \quad (172)$$

Il vettore velocità angolare vale:

$$\omega = [0 \;\; 0 \;\; \dot{\theta}] \,. \quad (173)$$

Sostituendo nella (170) le espressioni di $\dot{p}_C$ e ω trovate, otteniamo:

$$T_l = \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} -l s \dot{\theta} & l c \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l s \dot{\theta} \\ l c \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (m l^2 \dot{\theta}^2 + I_{zz} \dot{\theta}^2) \,. \quad (174)$$

Esplicitando i vari termini, la (168) può quindi essere riscritta come segue:

$T = T_m + T_l =$
$=$
1
2
$(I_m N^2 \dot{}^2 + m l^2 \dot{}^2 + I_{zz} \dot{}^2) =$
$=$
1
2 |$I_m N^2$ +{z$ml^2 + I_l$} l
$\dot{}^2$
$=$
1
2
$I \dot{}^2$, (175)
dove `e stato definito il momento d'inerzia totale del sistema, ridotto all'asse z, pari a $I = I_m N^2 + m l^2 + I_l$.

6.2.2 Energia potenziale del pendolo

L'energia potenziale di un corpo rigido soggetto ad un'accelerazione di gravit `a g vale $V = mgh$, dove m `e la massa del corpo, g `e il modulo dell'accelerazione di gravit `a e h `e la quota del paricentro rispetto al riferimento (arbitrario) scelto come zero per l'energia potenziale. Nel nostro caso, scegliendo la quota dell'origine O come zero, l'energia potenziale pu`o essere scritta come segue:
$V = -m g^T p_C$
$= -m$ 0 $-g$ 0 24
lc
ls
p_{Cz}
35
$= mgls$. (176)

6.2.3 Funzione lagrangiana e sue derivate

La funzione lagrangiana vale:
$L = T - V =$
1
2
$I \dot{}^2 - mgls$. (177)
La derivata parziale di L rispetto alla derivata temporale ˙ della coordinata lagrangiana vale:
@L
@˙
$= I \dot{}$. (178)
Derivando la (178) rispetto al tempo otteniamo:
d
dt
@L
@˙
$= I \ddot{}$. (179)
Derivando invece la L rispetto a otteniamo:
@L
@
$= -mglc$. (180)

6.2.4 Assemblaggio dell'equazione del moto

Al fine di scrivere l'equazione del moto rimane da calcolare la componente lagrangiana

delle forze attive . Le azioni sul sistema sono la coppia del motore
(ridotta al proprio asse) $_m$ e la gravit ` a. La gravit `a `e per`o una forza conservativa, quindi ne viene implicitamente tenuto conto tramite l'energia potenziale. Quindi non `e nient'altro che la coppia del motore ridotta all'asse "lento" tramite l'inverso del rapporto di riduzione N:
$= N_m$. (181)
Utilizzando le (179)(180)(181), l'equazione del moto risulta quindi:
$I \ddot{} + mgls = N_m$. (182)
Nel paragrafo seguente applicheremo il metodo ad un robot a catena aperta a n gradi di libert ` a.

6.3 Applicazione ad un robot a n giunti

Procederemo come visto nell'esempio del pendolo: calcolo dell'energia cinetica dei membri e degli attuatori, calcolo dell'energia potenziale, derivazione della funzione lagrangiana ed assemblaggio delle equazioni del moto. Faremo l'ipotesi semplificativa che ogni giunto (rotoidale o prismatico che sia) sia attuato da un singolo motoriduttore con rapporto di riduzione $1/N_i$ e che lo statore del motoriduttore sia solidale al link $i - 1$.

6.3.1 Energia cinetica di un link

Come gli allievi ricorderanno dai corsi di Meccanica Razionale, l'energia cinetica di un corpo rigido ha una parte legata alla velocit `a di traslazione del baricentro pi `u una parte legata alla velocit `a angolare. Per il generico link i, mostrato in Fig.24, l'energia cinetica (escluso quindi l'attuatore solidale al link) vale:

C_{li}
z_{i-1} z_i
O_i
O_{i-1}
y
z
x
x_i
x_{i-1} $\mathbf{p}_{li}$
$\mathbf{p}_{li}$
. ω_i

Figura 24: Calcolo dell'energia cinetica di un link.

$T_{li} =$
1
2
$(m_{li} \dot{p}^T_{li}$
$_i \dot{p}_{li} + !^T_i$
$I_{li} !_i)$, (183)
dove m_{li} e` la massa del link, $\dot{p}_{li}$
`e la velocit `a di traslazione del centro di massa
del link C_{li} , $!_i$ `e la velocit `a angolare e I_{li} `e il tensore d'inerzia (baricentrico) calcolato rispetto a una terna parallela alla terna base Oxyz e avente l'origine nel centro di massa del link. `E da notare che il tensore d'inerzia I_{li} varia al variare dell'orientazione del link e, quindi, al variare della configurazione del manipolatore q.
Vediamo adesso come esplicitare l'espressione (183) in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate rispetto al tempo. In modo analogo a

come abbiamo fatto nello studio della cinematica differenziale, costruiamo, per ogni link, lo jacobiano geometrico che permette di esprimere lo screw di velocit `a del link, utilizzando come polo il centro di massa, come segue:
$\dot{p}_{li}$
$!_i =$ " $J^{(li)}$
$_p$

$$J_o^{(l_i)}\dot{q}, \quad (184)$$

dove $J_p^{(l_i)}$ e $J_o^{(l_i)}$ sono rispettivamente lo jacobiano traslazionale e quello rotazionale del link. Alla luce della (184), l'energia cinetica può essere scritta in funzione del vettore $\dot{q}$, sostituendo a $\dot{p}_{l_i}$ e ω_i le rispettive espressioni:

$$T_{l_i} = \frac{1}{2}\left(m_{l_i}\dot{q}^T J_p^{(l_i)T} J_p^{(l_i)}\dot{q} + \dot{q}^T J_o^{(l_i)T} I_{l_i} J_o^{(l_i)}\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(m_{l_i} J_p^{(l_i)T} J_p^{(l_i)} + J_o^{(l_i)T} I_{l_i} J_o^{(l_i)}\right)\dot{q}, \quad (185)$$

Il tensore d'inerzia I_{l_i} varia con l'orientazione del link mentre se viene calcolato rispetto ad una terna solidale al link stesso rimane costante. Esiste una relazione (tensoriale) tra i due tensori d'inerzia. L'energia cinetica rotazionale del link deve essere invariante rispetto al sistema di riferimento usato per calcolare il tensore e rispetto al quale esprimere le componenti della velocità angolare, ovvero:

$$\frac{1}{2}\omega_i^T I_{l_i}\omega_i = \frac{1}{2}\omega_i^{i\,T} I_{l_i}^i \omega_i^i, \quad (186)$$

dove ω_i^i è la velocità angolare espressa nella terna i, solidale al link, e $I_{l_i}^i$ è il tensore d'inerzia rispetto ad una terna baricentrica parallela alla terna i. Ovviamente $I_{l_i}^i$ è costante. Sostituendo a ω_i^i

a secondo membro della (186) la quantità $R_i^T \omega_i$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\omega_i^T I_{l_i} \omega_i = \frac{1}{2}\omega_i^T R_i I^i_{l_i} R_i^T \omega_i . \quad (187)$$

La (187) deve essere valida $\forall \omega_i$, quindi deve valere la seguente relazione:

$$I_{l_i} = R_i I^i_{l_i} R_i^T \quad (188)$$

che, sostituita nella (185), ci permette di eliminare il tensore d'inerzia variabile I_{l_i} e fare apparire $I^i_{l_i}$ che è costante. Riscriviamo allora la (185) come segue:

$$T_{l_i} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(m_{l_i} J_p^{(l_i)T} J_p^{(l_i)} + J_o^{(l_i)T} R_i I^i_{l_i} R_i^T J_o^{(l_i)}\right)\dot{q} . \quad (189)$$

6.3.2 Energia potenziale di un link

Come visto nel paragrafo 6.2.2, l'energia potenziale (gravitazionale) di un corpo rigido è uguale a quella di un punto materiale avente la stessa massa e posto nel centro di massa del corpo rigido. Con riferimento alla Fig.25, scelta la quota dell'origine della terna base come zero dell'energia potenziale, l'espressione di V_{l_i} sarà quindi:

$$V_{l_i} = m_{l_i} g h_{l_i} , \quad (190)$$

Cli
zi-1 zi
y
z
x
pli
hli
g
u
O

Figura 25: Calcolo dell'energia potenziale di un link.

dove m_{l_i} è la massa del link, $g = ||g||$ è il modulo dell'accelerazione di gravità e h_{l_i} è l'altezza del centro di massa C_{l_i} rispetto al piano orizzontale ad energia potenziale nulla. h_{l_i} può essere calcolata come proiezione del vettore posizione p_{l_i} lungo la verticale. Se $u = -g$

g è il versore verticale diretto verso l'alto, h_{li} vale:

$$h_{li} = u^T p_{li} = -\frac{1}{g} g^T p_{li}. \quad (191)$$

Sostituendo l'espressione di h_{li} sopra trovata nella (190) otteniamo la seguente espressione di V_{li}:

$$V_{li} = -m_{li} g \frac{1}{g} g^T p_{li} = -m_{li} g^T p_{li}, \quad (192)$$

che è valida qualunque sia l'orientazione della terna base.

6.3.3 Energia cinetica degli attuatori

Ipotizziamo, per semplicità, che ogni giunto sia comandato da un singolo attuatore. In realtà questo non sempre è vero[5]. Facciamo inoltre l'ipotesi che l'attuatore del giunto $i + 1$ sia rotativo e abbia lo statore solidale al link i, come mostrato in Fig.26 per il caso di giunto rotoidale (il caso di giunto prismatico è

[5] Ad esempio nelle realizzazioni industriali di polsi sferici, in genere gli attuatori degli ultimi tre giunti lavorano insieme ed è una azione combinata dei tre attuatori che fa muovere un singolo giunto. In modo più generale si può ipotizzare che valga la relazione $\dot q_m = A \dot q$, dove $A \in R^{n\times n}$ è una matrice costante i cui elementi sono rapporti di riduzione. Nell'ipotesi semplificativa fatta, la matrice A è diagonale $\mathrm{diag}\{N_i\}$ e l'elemento N_i è il rapporto di riduzione tra attuatore i-esimo e giunto i-esimo, ovvero: $\dot q_{mi} = N_i \dot q_i$

1:Ni+1
Cmi+1
i+1
i
zmi+1
zi-1
zi
zi+1

Figura 26: Ipotesi semplificativa sull'attuazione: il giunto i è comandato da un singolo attuatore posto sul link $i - 1$.

analogo). Sia $I_{m_{i+1}}$ il tensore di inerzia del rotore $i + 1$-esimo rispetto ad una terna baricentrica parallela alla terna base. L'energia cinetica del rotore vale:

$$T_{m_{i+1}} = \frac{1}{2} m_{m_{i+1}} \dot p^T_{m_{i+1}} \dot p_{m_{i+1}} + \frac{1}{2} \omega^T_{m_{i+1}} I_{m_{i+1}} \omega_{m_{i+1}}. \quad (193)$$

Così come fatto per il link i, anche per il motore $i + 1$ è possibile definire uno jacobiano $J(m_{i+1})$ che descrive lo screw di velocità del motore in funzione delle velocità dei giunti:

$$\begin{bmatrix} \dot p_{m_{i+1}} \\ \omega_{m_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p^{(m_{i+1})} \\ J_o^{(m_{i+1})} \end{bmatrix} \dot q. \quad (194)$$

Sostituendo nella (193) le espressioni di $\dot{p}_{m_{i+1}}$ e $\omega_{m_{i+1}}$ ricavate dalla (194), otteniamo:

$$T_{m_{i+1}} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(m_{m_{i+1}} J_P^{(m_{i+1})T} J_P^{(m_{i+1})} + J_O^{(m_{i+1})T} I_{m_{i+1}} J_O^{(m_{i+1})}\right)\dot{q}. \quad (195)$$

6.3.4 Energia potenziale degli attuatori

Analogamente a quanto visto per il link i nel Par. 6.3.2, l'energia potenziale del motore $i + 1$ può essere calcolata utilizzando la seguente formula

$$V_{m_{i+1}} = -m_{m_{i+1}} g^T p_{m_{i+1}}, \quad (196)$$

essenzialmente identica alla (192).

6.3.5 Considerazioni sulla funzione lagrangiana e sulle equazioni del moto

Da quanto visto nei paragrafi precedenti e, in particolare dalle Eq. (189) e (195), l'energia cinetica del manipolatore può essere nella forma:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}, \quad (197)$$

dove $B(q)$ è detta *matrice d'inerzia*, dipende dai parametri cinematici e dinamici del manipolatore, ed è funzione della configurazione q. Risulta:

$$B(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(m_{l_i} J_P^{(l_i)T} J_P^{(l_i)} + J_O^{(l_i)T} I_{l_i} J_O^{(l_i)} + m_{m_i} J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + J_O^{(m_i)T} I_{m_i} J_O^{(m_i)}\right). \quad (198)$$

L'espressione di $B(q)$ può essere elaborata in modo da fare apparire esplicitamente i parametri dinamici (costanti) dei link e degli attuatori.

Una importantissima proprietà della matrice d'inerzia è quella di essere simmetrica e definita positiva, quindi è sempre possibile calcolarne l'inversa $B^{-1}(q)$ (almeno numericamente, se non simbolicamente, vista la complessità di una simile operazione per n 3).

L’energia potenziale ha un’espressione pi `u semplice rispetto alla (198) ma
non contiene parametri aggiuntivi rispetto a quelli che compaiono nella matrice di
inerzia.
In particolare si pu`o dimostrare che per ognuno dei giunti del manipolatore, la
funzione lagrangiana dipende **(linearmente!)** da
$m_i = m_{l_i} + m_{m_{i+1}}$: massa del link i sommata alla massa del motore
$i + 1$, solidale al link;
$m_i r_{i,C_i}$: momento statico complessivo del link pi `u il motore
rispetto all’origine della terna D-H solidale al link;
I_i
$_i$: tensore d’inerzia complessivo rispetto alla terna DH
solidale al link del sistema link i pi `u motore $i + 1$;
$I_{m_{izz}}$: momento d’inerzia del motore rispetto al proprio asse
di rotazione.
In totale si tratta di $1 + 3 + 6 + 1 = 11$ parametri dinamici per ogni giunto quindi,
in totale, la funzione lagrangiana del manipolatore dipende da $n \times 11$ parametri
dinamici che possono apparire individualmente oppure in combinazione lineare
con altri parametri dinamici.
La costanza dei parametri dinamici sopra elencati fa s`ı che, nelle operazioni
di derivazione previste dal metodo di Lagrange, solo le funzioni cinematiche debbano
essere derivate.
La linearit `a di L rispetto ai parametri dinamici fa s`ı che anche le equazioni
del moto alla fine risultino lineari rispetto ai parametri dinamici **(ma non rispetto
alle q e $\dot{q}$)**. Tale linearita` permette di *identificare* in modo abbastanza agevole

i parametri dinamici non perfettamente noti tramite l’esecuzione di prove sperimentali.
Applicando il metodo di Lagrange si giunge alla scrittura delle equazioni del
moto che sono nella forma:
$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = - J^T - {}_F$, (199)
dove:
$B(q)$ 2 $R^{n\times n}$ `e la matrice d’inerzia;
$C(q, \dot{q})$ 2 $R^{n\times n}$ e` detta matrice dei termini di Coriolis e centrifughi;
$g(q)$ 2 R^n `e il vettore delle azioni delle forze di gravit `a sui giunti;
2 R^n `e il vettore delle azioni degli attuatori proiettato nello
spazio dei giunti;
J^T 2 R^n `e la proiezione del wrench di forza 2 R^6 (esercitato
dall’organo terminale sull’esterno) nello spazio
dei giunti;
$_F$ 2 R^n vettore delle forze d’attrito.
Come preannunciato all’inizio del capitolo, la (199) pu`o essere invertita tramite il
calcolo di $B^{-1}(q)$:
$\ddot{q} = B^{-1}(q)(- J^T - {}_F - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q))$, (200)
e la (200) pu`o essere utilizzata per realizzare dei simulatori dinamici.

A Screw

A.1 Il concetto di screw

Il moto di un corpo rigido rispetto ad un sistema di riferimento `e completamente
esprimibile tramite la sua velocit `a angolare pi `u la velocit `a di un suo punto: in
breve tramite il suo “twist screw” (screw in inglese vuol dire elica e/o vite). Lo
screw `e un’entit `a geometrica con una propria algebra ed `e costituita da un vettore
libero ed un vettore applicato. Lo screw di forza o “wrench screw” `e utilizzato per

rappresentare risultante e momento risultante di un sistema di forze e coppie applicate, mentre lo screw di velocit `a o twist screw `e utilizzato per rappresentare il moto di un corpo rigido. Esso `e composto dalla velocit `a angolare (vettore libero) e dalla velocit `a di un punto del corpo. Per rappresentare numericamente un dato twist screw sono necessari:

• un punto P del corpo rigido di cui esprimere la velocita` p˙ di traslazione (polo);

• un sistema di riferimento rispetto al quale esprimere le componenti dei due vettori p˙ e !.

`E
da notare che uno stesso screw ha una diversa rappresentazione numerica se si cambia il polo oppure se si cambia il sistema di riferimento. Nel caso generale in cui siano ! 6= 0 e p˙ 6= 0, esiste sempre una retta, detta “asse centrale” o “asse elicoidale,” tale che se uno dei suoi punti e` scelto come polo, allora ! e p˙ sono paralleli, esattamente come succede, appunto, in una vite che si avviti in una madrevite fissa: la vite trasla lungo il proprio asse e contemporaneamente ruota attorno allo stesso asse. I punti del corpo rigido appartenenti all’asse centrale hanno tutti (istantaneamente!) la stessa velocit `a di traslazione, parallela all’asse stesso, e questa `e la minima in norma fra le velocit `a di tutti i punti del corpo rigido. Se lo screw `e espresso utilizzando come polo un punto dell’asse centrale, il rapporto | p˙ |
|!|
viene detto passo a radiante dello screw (per distinguerlo dal passo al giro pari a 2| p˙ |
|!|
). Al passo si pu`o attribuire il segno positivo se p e ! hanno lo stesso verso (screw destrorsa) e il segno negativo se p e ! hanno verso opposto (screw sinistrorsa).

Esistono inoltre due casi particolari:

• **moto di traslazione pura:** l’asse centrale non `e definito e il passo diventa infinito (infinity pitch screw);

• **moto di rotazione pura:** l’asse centrale coincide con l’asse di istantanea rotazione (il moto `e infatti un moto piano) ed il passo `e nullo (zero pitch screw).

Dato che i cinematismi che studiamo sono di tipo seriale, ed ogni membro ha rispetto al precedente un moto elicoidale relativo (degenerato in una pura rotazione o traslazione) caratterizzato da un certo “twist screw” relativo, allora il

moto complessivo dell’organo terminale pu`o essere calcolato sommando opportunamente i twist screw relativi imposti dal moto dei singoli giunti. “Sommare opportunamente” vuol dire utilizzare lo stesso sistema di riferimento (quello di base, ad esempio) per rappresentare i vettori e lo stesso polo per scrivere la parte traslazionale dello screw. Dato che nello studio della cinematica differenziale lo scopo `e quello riuscire a scrivere la velocit `a dell’origine della terna utensile e la sua velocit `a angolare rispetto alla terna base, si sceglie in genere di utilizzare come polo l’origine della terna utensile e la terna base per rappresentare i vettori.

A.2 Composizione di screw di velocit`a

Supponiamo di avere 2 corpi rigidi denominati 1 e 2 in moto relativo tra loro e rispetto ad un terzo corpo 0 (telaio). Fissiamo una terna di riferimento $Ox_0y_0z_0$ solidale al corpo 0 che supponiamo essere in quiete.

Definiamo le velocit `a angolari dei corpi 1 e 2 (tutte espresse nel sistema di riferimento $Ox_0y_0z_0$) $!_{1,0}$, $!_{2,1}$, $!_{2,0}$, dove $!_{i,j}$ indica la velocit `a angolare del corpo i rispetto al corpo j. Tra le velocità angolari vale la seguente legge di composizione:

$$\omega_{2,0} = \omega_{1,0} + \omega_{2,1} . \quad (201)$$

La (201) può essere generalizzata come segue:

$$\omega_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,i-1} . \quad (202)$$

Scegliamo un punto P_0 solidale al corpo 0, un punto P_1 solidale al corpo 1 ed un punto P_2 solidale al corpo 2 e così via, fino al punto P_n, solidale al corpo n. La velocità $\dot{p}_n$ del punto P_n rispetto al sistema di riferimento 0 può essere costruita come somma dei contributi di velocità relativa tra ogni corpo ed il precedente. Bisogna cioè calcolare la velocità relativa del punto $P^{(i)}_n$, appartenente al corpo i e istantaneamente coincidente con il punto P_n, rispetto al corpo $i-1$ e sommare tutti i contributi.

Indichiamo tale velocità relativa con $\dot{p}^{(i)}_{n,i-1}$. La velocità del punto P_n (rispetto al sistema 0) risulterà pari alla somma di tutti i contributi di moto relativo:

$$\dot{p}_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} \dot{p}^{(i)}_{n,i-1} \quad (203)$$

Impilando i primi ed i secondi membri delle (202)(203) possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{n,0} \\ \omega_{n,0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \dot{p}^{(i)}_{n,i-1} \\ \omega_{i,i-1} \end{bmatrix} \quad (204)$$

Non è difficile riconoscere nel primo membro della (204) lo screw di velocità del corpo rigido n, mentre a secondo membro abbiamo la sommatoria degli screw di velocità relativa tra ogni corpo ed i precedente. Se quindi indichiamo con:

$$v_{n,0} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{n,0} \\ \omega_{n,0} \end{bmatrix} \quad (205)$$

lo screw di velocità relativa del corpo n rispetto al corpo 0 e con

$$v_{i,i-1} = \begin{bmatrix} \dot{p}^{(i)}_{n,i-1} \\ \omega_{i,i-1} \end{bmatrix} \quad (206)$$

lo screw di velocità relativa del corpo i rispetto al corpo $i-1$, possiamo semplicemente scrivere:

$$v_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} v_{i,i-1} , \quad (207)$$

quindi gli screw di velocità di corpi in moto relativo tra loro si compongono tramite un'operazione di semplice somma, purché venga utilizzato lo stesso sistema di riferimento e lo stesso polo di velocità per esprimere le coordinate dei varie screw.

Contenuti

Lista delle Figure